Über die Bedeutung gewisser Varianten des Baire'schen Kategorienbegriffs für die Funktionenräume $C_c(T)$

Wolfgang Lehner

1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547005_0035

Über die Bedeutung gewisser Varianten des Baire'schen Kategorienbegriffs für die Funktionenräume $C_c(T)$

D I S S E R T A T I O N

Zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Wolfgang Lehner
aus München

eingereicht im November 1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Referent: Prof. Dr. W. Roelcke

Korreferent: Priv. Doz. Dr. V. Eberhardt

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1979

Druck: Dissertationsdruck Novotny jr., Starnberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht 1

Kapitel I: α-Räume und verwandte Begriffe 6

Kapitel II: Vollständig reguläre topologische Räume und Räume stetiger Funktionen 15

Kapitel III: Eine Charakterisierung der α- und α'-Räume in den Klassen $C_c(T)$ und $C_s(T)$ 32

Kapitel IV: Folgerungen und Beispiele 47

Kapitel V: Vererbbarkeitseigenschaften und eine Charakterisierung der $\tau\alpha$-Räume in der Klasse der μ-Räume 64

Kapitel VI: Eine Charakterisierung der Pseudovollständigkeit im Sinne von Oxtoby in der Klasse $C_s(T)$ 75

Literaturverzeichnis 80

Symbole und Bezeichnungen 84

Einleitung und Übersicht

In einigen wichtigen Sätzen der Funktionalanalysis, so zum Beispiel im klassischen Graphensatz oder im Satz von Banach-Steinhaus steht die Voraussetzung, daß ein topologischer linearer Raum nicht mager, d.h. von zweiter Bairescher Kategorie ist. Im Beweis wird dann meist diese Voraussetzung nicht voll ausgeschöpft, was nicht verwunderlich ist, da der Begriff " nicht mager " rein topologischer Natur ist. Bringt man nun die lineare Struktur des Raumes ins Spiel, entstehen Abschwächungen der Bedingung " nicht mager ", so zum Beispiel im lokalkonvexen Fall der Begriff des tonnelierten Raumes, mit dem sich Varianten der beiden oben genannten Sätze beweisen lassen.

In eine ähnliche Richtung geht der Begriff des α-Raumes, der von ROELCKE stammt. Dabei heißt ein lokalkonvexer (topologischer linearer) Raum E ein α-Raum, wenn es zu jeder aufsteigenden Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener, absolutkonvexer Teilmengen A_n ($n\in\mathbb{N}$) von E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ gibt, so daß A_{n_o} absorbierend ist. Diese Definition läßt sich in naheliegender Weise modifizieren, indem man zum Beispiel die Bedingung, daß die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, fortläßt. Solche Räume nennt man dann α'-Räume. Tonnelierte α-Räume sind schon des öfteren in der Literatur aufgetaucht. (Siehe zum Beispiel [AK] , [V] , [$Sa_{1,2,3}$], [ST] , [T_1]. Ein Literaturverzeichnis findet man am Schluß dieser Arbeit.) Vor allem SAXON und TODD bewiesen in ihren

eben zitierten Arbeiten einige Vererbbarkeitseigenschaften für tonnelierte α-Räume, die für nicht magere Räume unbekannt sind, eine weitere Variante des Graphensatzes und fanden einige unterscheidende Beispiele.

Eine wohlbekannte Klasse lokalkonvexer Räume sind die Räume $C_c(T)$ und $C_s(T)$. Dabei bezeichnet T einen vollständig regulären (insbesondre separierten) topologischen Raum, C(T) den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf T, c die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von T und s die Topologie der punktweisen Konvergenz. Schon seit ca. dreißig Jahren haben sich viele Mathematiker, u.a. NACHBIN, SHIROTA, WARNER, BUCHWALTER und SCHMETS, mit der folgenden Frage beschäftigt:

> Wie lassen sich Eigenschaften der Räume $C_c(T)$ und $C_s(T)$ durch Eigenschaften des Raumes T charakterisieren?

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, diese Frage für die Eigenschaft " $C_{c(s)}(T)$ α-Raum " zu beantworten. Der Inhalt der einzelnen Kapitel läßt sich dabei wie folgt zusammenfassen:

Die ersten beiden Kapitel sind vorbereitender Natur. In Kapitel I werden Begriffe wie " mager ", " Baire'scher Raum ", "α-Raum " definiert, und bekannte Sätze angegeben, die später gebraucht werden. Auch der Begriff der Pseudovollständigkeit eines topologischen Raumes, der von OXTOBY stammt und eine Verschärfung des Begriffes " Baire'scher Raum " darstellt, wird hier eingeführt. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit vollständig regulären topologischen Räumen und Räumen stetiger Funktionen. Dabei wurde besonderes Gewicht auf die Darstellung der Begriffe " topolo-

gisch beschränkt " und " μ-Raum " gelegt. Zusätzlich enthält es einen kurzen Überblick über grundlegende Charakterisierungen von Eigenschaften der Räume $C_c(T)$ durch Eigenschaften des Raumes T.

Kapitel III beginnt mit der Beschreibung des Trägers eines stetigen, linearen Funktionals auf $C_c(T)$. Mittels einer einfachen dualen Charakterisierung der α- bzw. α'-Räume, sowie einer naheliegenden Verallgemeinerung einer Beobachtung, die auf NACHBIN zurückgeht, erhält man eine Charakterisierung derjenigen vollständig regulären Räume T, für die $C_c(T)$ und $C_s(T)$ α- bzw. α'-Räume sind (III.3.1.; III.3.2.). Diese Räume heißen dann $\tau\alpha$- bzw. $\tau\alpha'$-Räume (III.2.1.; III.2.3.). Das Kapitel IV fängt an mit einer einfachen Folgerung aus dieser Charakterisierung, und man bekommt dann zusammen mit einem Satz von PFISTER folgende Aussage (IV.1.5.):

Sei T ein parakompakter, vollständig regulärer Raum von punktweise abzählbarem Typ. Dann sind äquivalent:

(a) $C_c(T)$ ist pseudovollständig.

(b) T ist ein $\tau\alpha$-Raum.

(c) T ist lokalkompakt.

Räume von punktweise abzählbarem Typ wurden von ARCHANGEL'SKIĬ eingeführt (IV.1.2.). Wie man sofort sieht, ist jeder separierte Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ein Raum von punktweise abzählbarem Typ. Insbesondre gelten also obige Äquivalenzen, falls der Raum T metrisierbar ist. Schließlich enthält dieses Kapitel einige ausführlich dargestellte Beispiele.

Das Hauptergebnis des nächsten Kapitels ist eine Beschreibung derjenigen μ-Räume, die $\tau\alpha$-Räume sind. Als Folgerung ergibt sich, daß die Eigenschaft "$\tau\alpha$-Raum " in der Klasse der μ-Räume invariant ist unter eigentlichen (perfekten) Abbildungen. Schließlich werden im sechsten und letzten Abschnitt in einfacher Weise diejenigen vollständig regulären Räume T charakterisiert, für die $C_s(T)$ pseudovollständig ist. Insgesamt erhalten wir also eine teilweise Antwort auf die folgende Frage:

> Für welche vollständig regulären Räume T ist $C_c(T)$ bzw. $C_s(T)$ ein Baire'scher Raum?

Dieses Problem ist anscheinend noch nicht in Angriff genommen worden, und ein direkter Zugang zur Lösung ist auch in dieser Arbeit nicht gegeben. Hinweise in der Literatur sind eine Arbeit von LUTZER und McCOY ([LMC]), in der diese Frage in einer ganz speziellen Klasse stetiger Funktionen beantwortet wird, sowie eine Anmerkung in [Wi:p.333;table1] , die besagt, daß $C_c(\mathbb{Q})$ ($\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen) kein Baire'scher Raum ist (vgl. IV.1.9.(a)). Eine Auflistung der verwendeten Literatur, ein Verzeichnis der benutzten Symbole und Begriffe sowie eine Zusammenfassung der offenen Fragen beschließen die Arbeit.

In der Theorie der topologischen linearen Räume halten wir uns an die Definitionen aus dem Buch von HORVÁTH ([H]). In der allgemeinen Topologie lehnt sich diese Arbeit so eng wie möglich an die Terminologie von BOURBAKI ([B]) an. Für speziellere Begriffe, die in [B] nicht behandelt werden, verwenden wir die Bezeichnungen aus [CN] .

Herrn Prof. Dr. W. ROELCKE möchte ich für die Anregung und das stete Interesse am Fortgang dieser Arbeit herzlich danken. Neben Frau Dr. S. DIEROLF und Herrn Dr. V. EBERHARDT bin ich Herrn Dr. H. PFISTER zu besonderem Dank verpflichtet, der mir in vielen Diskussionen manch wertvolle Anregung gegeben hat.

Kapitel I

α-Räume und verwandte Begriffe

I.1. Baire'sche Räume und pseudovollständige Räume im Sinne von Oxtoby

I.1.1. Definition. Sei R ein topologischer Raum.

(a) $A \subset R$ heißt nirgends dicht: $\Leftrightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

(b) $A \subset R$ heißt mager oder von erster Baire'scher Kategorie (in R) : $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nirgends dichten Teilmengen A_n von R derart, daß $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(c) $A \subset R$ heißt von zweiter Baire'scher Kategorie (in R) genau dann, wenn $A \subset R$ nicht mager (in R) ist.

(d) R heißt Baire'scher Raum: $\Leftrightarrow$ Jede nichtleere, offene Teilmenge von R ist nicht mager.

I.1.2. Bemerkungen.

(a) Eine Darstellung von Eigenschaften magerer Mengen und Baire'scher Räume findet man z.B. bei BOURBAKI [B:Ch. IX,§5] und bei TODD [T_1:Ch.1] .

(b) Sei R ein topologischer Raum, $R' \subset R$ eine dichte Teilmenge. Ist R' ein Baire'scher Raum, so ist auch R ein Baire'scher Raum. (zum Beweis vgl. [T_1:1.16.])

(c) Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:
(1) G ist nicht mager.
(2) G ist Baire'scher Raum.
(zum Beweis vgl. [Wi:Ch.12.1.,problem 115])

I.1.3. Definition. Sei R ein topologischer Raum.

(a) R heißt quasiregulär: $\Leftrightarrow$ Ist $A \subset R$ nichtleer und offen, so gibt es eine nichtleere, offene Teilmenge $B \subset R$ derart, daß gilt: $\overline{B} \subset A$.

(b) Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von nichtleeren, offenen Teilmengen von R. Dann heißt $\mathcal{B}$ Pseudobasis für R: $\Leftrightarrow$ Ist $U \subset R$ offen und nichtleer, so gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subset U$.

(c) R heißt pseudovollständig (im Sinne von Oxtoby): $\Leftrightarrow$ R ist quasiregulär und es gibt eine Folge $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Pseudobasen für R mit folgender Eigenschaft: Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von R mit $B_n \in \mathcal{B}_n$ und $\overline{B}_{n+1} \subseteq B_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, so gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

I.1.4. Bemerkung. Pseudovollständige Räume wurden von OXTOBY in [O:sect.5] eingeführt und es gelten für einen top. Raum R folgende Implikationen: R vollständig metrisierbar $\Rightarrow$ R pseudovollständig $\Rightarrow$ R Baire'scher Raum (Zum Beweis dieser Aussagen vgl. [O:(5.1)] oder [T_1:1.33;1.35.]). Unter Zuhilfenahme der Kontinuumshypothese definierte OXTOBY in [O:sect.4] einen vollständig regulären, Baire'schen Raum, dessen Quadrat kein Baire'scher Raum ist. Dagegen gilt:

I.1.5. Satz. Sei $(R_i)_{i\in I}$ eine Familie pseudovollständiger Räume. Dann ist $\prod_{i\in I} R_i$ pseudovollständig.
Beweis: Siehe [O:Th.6] oder [T_1:1.36.].

I.1.6. Definition. Seien R, R' topologische Räume, $F: R \longrightarrow R'$ eine Abbildung. Dann heißt F relativ fast offen: $\Leftrightarrow$ Ist $r \in R$ und U eine Umgebung von r, so ist $\overline{F(U)} \cap F(R)$ eine Umgebung von F(r) bezüglich des Teilraums F(R) von R'.

I.1.7. Lemma. Seien R, R' topologische Räume und F: R → R' eine stetige, relativ fast offene Abbildung. Dann gilt:
R Baire'scher Raum ⇒ F(R) Baire'scher Raum.
Beweis: Siehe $[T_1: 1.23]$.

I.2. α-Räume

I.2.1. Vorbemerkung. In der Theorie der topologischen linearen Räume verwenden wir die Begriffe aus [H].

I.2.2. Definition. (ROELCKE) Sei E ein lokalkonvexer (topologischer linearer) Raum.

(a) E heißt α'-Raum: ⇔ Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, absolutkonvexer Teilmengen von E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, so gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß A_{n_o} absorbierend ist.

(b) E heißt α-Raum: ⇔ Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge abgeschlossener, absolutkonvexer Teilmengen von E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, so gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß A_{n_o} absorbierend ist.

(c) E heißt α'_b-Raum: ⇔ Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter, absolutkonvexer Teilmengen von E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, so gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß A_{n_o} absorbierend ist.

(d) E heißt α'_1-Raum: ⇔ Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, linearer Teilräume von E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, so gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$ derart, daß $A_{n_o} = E$.

I.2.3. Bemerkungen.

(a) SAXON (vgl. z.B. ST:§1) nennt tonnelierte α'-Räume unordered Baire-like spaces und tonnelierte α-Räume Baire-like spaces. Wir werden jedoch im weiteren bei

den in der obigen Definition eingeführten Bezeichnungen bleiben.

(b) In der Definition I.2.2. ist die Voraussetzung, daß die Mengen A_n konvex sind, wesentlich. So hat z.B. SAXON den folgenden Satz bewiesen (vgl. [Sa_3:Th.1]): Ein topologischer linearer Raum ist genau dann ein Baire'scher Raum, wenn jede abgeschlossene, kreisförmige, absorbierende Teilmenge Umgebung eines ihrer Punkte ist.

(c) In der Klasse der lokalkonvexen Räume gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{lll} \text{pseudovollständiger Raum} & & \alpha\text{-Raum} \\ \Downarrow & & \\ \text{Baire'scher Raum} \Rightarrow \alpha'\text{-Raum} & \rightleftarrows & \alpha'_b\text{-Raum} \\ \Downarrow & & \\ \text{tonnelierter Raum} & & \alpha'_l\text{-Raum} \end{array}$$

Daß diese Implikationen richtig sind, ist leicht einzusehen. Der folgenden Liste von Beispielen ist zu entnehmen, daß in diesem Diagramm im allgemeinen keine zusätzliche Implikation gilt.

(1) Es gibt tonnelierte α'-Räume, die keine Baire'schen Räume sind (vgl. [Sa_2:Ex.2.2.] oder IV.4.4. und IV.4.7.).

(2) Es gibt einen tonnelierten α-Raum, der kein α'_b- und kein α'_l-Raum ist (vgl. [Sa_2:Ex.1.4.]).

(3) Es gibt einen tonnelierten Raum, der α'_b- und α'_l-, aber kein α-Raum ist (vgl. IV.1.8.).

(4) Es gibt α'-Räume, die nicht tonneliert sind (vgl. IV.4.1.).

(5) Sei $\varphi := \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K}$ die abzählbar unendliche lokalkonvexe direkte Summe des Körpers $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann ist φ bekanntlich tonneliert ([H:Ch 3,§6,cor. zu prop. 4]),

aber kein α-, kein α_b'-, und kein α_1'-Raum, denn $\varphi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n;n]^n$.

(6) Sei I eine überabzählbare Indexmenge. Dann ist $\coprod_{i\in I} \mathbb{K}$ ein α_b'-Raum, denn jede beschränkte Teilmenge von $\coprod_{i\in I} \mathbb{K}$ ist endlichdimensional nach [H:Ch.2,§12,exc.10], jedoch kein α_1'-Raum.

(7) (Siehe [R:p.4].) Sei E ein vollständig metrisierbarer lokalkonvexer Raum, $C \subset E$ eine absolutkonvexe, kompakte Teilmenge von E, so daß der von C aufgespannte Teilraum F unendlichdimensional und dicht in E ist. Da F nicht tonneliert ist, ist $\dim(F/E) > \mathrm{card}(\mathbb{N})$ (vgl. z.B. [AK:Th.2]). Wir wählen einen Teilraum G mit $F \subset G \subset E$ derart, daß $\dim(G/F) = \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine algebraische Kobasis von F in G. Dann ist G kein α_b'-Raum, denn $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n := n(C + \Gamma(\{a_i \mid i \le n\}))$. Aber G ist ein α_1'-Raum; denn F_C (siehe [H:Ch.3,§5,prop.6(b)]) ist ein Banachraum, und die Behauptung folgt dann aus (d) und I.2.5.(a).

(d) Wie man sofort sieht, vererben sich die Eigenschaften (a)-(d) aus I.2.2. auf beliebige gröbere lokalkonvexe Topologien.

(e) Die Eigenschaften (a)-(d) aus der Definition I.2.2. hängen nur von dem dualen Paar (E,E') ab, und man kann folgende duale Charakterisierungen angeben:

I.2.4. Lemma. (vgl. [Sa$_2$:Th.2.1.])

Sei E ein lokalkonvexer Raum und E' sein Dualraum. Dann sind äquivalent:

(a) E ist ein α'-Raum.

(b) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in E' derart, daß es zu jedem $e\in E$ ein $m\in\mathbb{N}$ mit $\sup\{|f(e)|\,|\,f\in B_m\}<\infty$ gibt, so ist für ein $n_o\in\mathbb{N}$ B_{n_o} $\sigma(E',E)$-beschränkt.

(c) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in E' derart, daß es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $e_n\in E$ mit $\sup\{|f(e_n)|\,|\,f\in B_n\}=\infty$ gibt, dann gibt es $e\in E$ mit $\sup\{|f(e)|\,|\,f\in B_n\}=\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Beweis: Daß (b) und (c) äquivalent sind, ist klar. Im folgenden bezeichne für eine Menge $A\subset E$ ($\subset E'$) A° die Polare von A in E'(in E).

(a)$\Rightarrow$(b): Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in E' mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $e\in E$ ein $m\in\mathbb{N}$ gibt mit $\sup\{|f(e)|\,|\,f\in B_m\}<\infty$. $\Rightarrow \bigcup_{k,m\in\mathbb{N}} kB_m^\circ=E$. Denn sei $e\in E$; dann gibt es $k,m\in\mathbb{N}$ mit $|f(e)|\le k$ für alle $f\in B_m$; d.h. $e\in kB_m^\circ$. Da jedes B_n° absolutkonvex und $\sigma(E,E')$-abgeschlossen, also abgeschlossen ist, gibt es nach Voraussetzung ein $n_o\in\mathbb{N}$, so daß $B_{n_o}^\circ$ absorbierend ist. $\Rightarrow B_{n_o}$ ist $\sigma(E',E)$-beschränkt nach [H:Ch.3., §3,prop.1(f)].

(b)$\Rightarrow$(a): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, absolutkonvexer Mengen in E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=E$. Dann ist jedes A_n auch $\sigma(E,E')$-abgeschlossen nach [H:Ch.3,§4,prop.3]. O.B.d.A. können alle $A_n\neq\emptyset$ angenommen werden. Dann ist $(A_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in E' derart, daß es zu jedem $e\in E$ ein $n\in\mathbb{N}$ gibt mit $\sup\{|f(e)|\,|\,f\in A_n^\circ\}<\infty$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $n_o\in\mathbb{N}$ derart, daß $A_{n_o}^\circ$ $\sigma(E',E)$-beschränkt ist. $\Rightarrow A_{n_o}^{\circ\circ}$ ist absorbierend. Aus dem Bipolarensatz ([H:Ch.3,§3,th.1]) folgt dann die Behauptung. %

Zusatz: Eine analoge Charakterisierung für α- bzw. α'_b-Räume erhält man, wenn man im Lemma in (b) und (c) "Folge"

durch "absteigende Folge" bzw. durch "Folge absorbierender Mengen" ersetzt.

Im Falle "α-Raum" hat man nur zu beachten, daß im Beweisteil "(a)$\Rightarrow$(b)" die Folge $(nB_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_n^\circ$ gilt. Der Fall "α_b'-Raum" ergibt sich wiederum aus [H:Ch.3,§3,prop.1(f)].

I.2.5. Bemerkungen.

(a) Wie man unmittelbar sieht, gilt die folgende Aussage: Sei E ein lokalkonvexer Raum, F ein dichter linearer Teilraum von E. Ist dann F ein α_1'-Raum, so auch E.

(b) Im allgemeinen ist jedoch die Vervollständigung eines α'-Raumes nicht einmal ein α-Raum, wie wir in IV.1.9.(b) sehen werden. Demgegenüber gilt:

(c) Sei E lokalkonvex, F ein dichter linearer Teilraum von E. Ist F ein tonnelierter α- bzw. α'-Raum, so ist auch E ein tonnelierter α- bzw. α'-Raum. Für einen Beweis dieser Aussage siehe [Sa_1:Th.2.16.].

I.2.6. Satz. (VALDIVIA)

Sei E ein tonnelierter Raum. Ist die Vervollständigung von E ein Baire'scher Raum, so ist E ein α-Raum.

Beweis: Siehe [V:Th.4].

I.2.7. Bemerkungen.

(a) Der Satz I.2.6. gibt also eine teilweise Antwort auf die Frage, wann in I.2.5.(c) die Umkehrung gilt. Wie wir in IV.3.5.(e) sehen werden, kann in I.2.6."α-Raum" nicht zu"α'-Raum"verschärft werden.

(b) Aus I.1.4. und dem obigen Satz erhalten wir als Fol-

gerung: Ist E tonneliert und metrisierbar, so ist E ein ∞-Raum. Dieses Ergebnis findet man schon in [AK:Satz 1].

I.2.8. Satz. Sei $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von lokalkonvexen Räumen. Dann gilt:

(a) Ist E_i ein ∞-Raum für alle $i\in I \Rightarrow \prod_{i\in I} E_i$ ist ein ∞-Raum.

(b) Ist E_i ein tonnelierter ∞'-Raum für alle $i\in I \Rightarrow$ $\prod_{i\in I} E_i$ ist ein tonnelierter ∞'-Raum.

Beweis: (a) (Siehe [R:p.18].)

Für $J\subsetneq I$ identifizieren wir in kanonischer Weise $\prod_{i\in J} E_i$ mit $(\prod_{i\in J} E_i) \times \{0\} \subset E := \prod_{i\in I} E_i$. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge absolutkonvexer, abgeschlossener Teilmengen von E mit $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(1) Beh.: Es gibt $m\in\mathbb{N}$ und $J\subset I$ endlich mit $\prod_{i\in I} B_i \subset A_m$, wobei

$$B_i=E_i \text{ für } i\in I\setminus J \text{ und } B_i=\{0\} \text{ für } i\in J.$$

Bew. von (1): Für $i\in I$ bezeichne F_i die Menge E_i, ausgestattet mit der diskreten Topologie. Da jedes F_i vollständig metrisierbar ist, ist $\prod_{i\in I} F_i$ nicht mager nach I.1.4 und I.1.5.. (1) folgt dann aus der Definition der Produkttopologie und der Voraussetzung, daß alle A_n $(n\in\mathbb{N})$ absolutkonvex sind.

Sei nun $J\neq\emptyset$. Für jedes $i\in J$ ist dann $(A_n\cap E_i)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge absolutkonvexer, abgeschlossener Teilmengen von E_i mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap E_i)=E_i$. Nach Voraussetzung gibt es dann zu jedem $i\in J$ ein $n_i\in\mathbb{N}$, so daß $A_n\cap E_i$ eine absorbierende Teilmenge von E_i ist. Sei $k:=\max\{n_i \mid i\in J\}$

Sei nun $n_o:=\max\{m,k\}$. Dann ist A_{n_o} eine absorbierende

Teilmenge von E, denn es gilt: $\prod_{i\in I} B_i \subset A_{n_0}$, wobei $B_i = E_i$ für $i \in I \setminus J$ und $B_i = \frac{1}{\mathrm{card}(J)\cdot 2}(A_{n_i} \cap E_i)$ für $i \in J$, weil $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und jedes A_n $(n\in\mathbb{N})$ absolutkonvex ist.

Damit ist (a) gezeigt.

Für einen Beweis von (b) siehe [ST:Th.4.10]. %

I.2.9. Bemerkungen. Seien E und F topologische lineare Räume, $g: E \longrightarrow F$ linear. Wie man leicht sieht, gilt:

(a) g ist relativ fast offen $\Leftrightarrow$ Für jede Nullumgebung U von E ist $\overline{g(U)} \cap g(E)$ eine Nullumgebung von $g(E)$.

(b) Sind E, F lokalkonvex, und ist g stetig, so gilt:
E α- bzw. α'-Raum $\Rightarrow$ $g(E)$ α- bzw. α'-Raum.

(c) Sind E, F lokalkonvex, und ist g stetig und relativ fast offen, so gilt: E tonneliert $\Rightarrow$ $g(E)$ tonneliert.

I.2.10. Definition. Sei (R,τ) ein topologischer Raum.

(a) Ist d eine Metrik auf R, so heißt d stetig (bzgl. τ): $\Leftrightarrow$ Die von d erzeugte Topologie auf R ist gröber als τ.

(b) (R,τ) heißt submetrisierbar : $\Leftrightarrow$ Es gibt eine stetige Metrik auf (R,τ).

I.2.11. Satz. (TODD)

Seien E ein pseudovollständiger, topologischer linearer Raum, F ein topologischer linearer Raum, dessen Vervollständigung submetrisierbar ist, und $g: E \longrightarrow F$ eine surjektive, lineare, stetige, relativ fast offene Abbildung. Dann ist F vollständig.

Beweis: Siehe [T_2:Th.3.1] .

Kapitel II

Vollständig reguläre topologische Räume und Räume stetiger Funktionen

II.1. Vollständig reguläre topologische Räume

II.1.1. Vorbemerkung. In der allgemeinen Topologie verwenden wir die Terminologie von BOURBAKI ([B]). Bei spezielleren Begriffsbildungen, die bei [B] nicht vorkommen, halten wir uns an die Bezeichnungen aus dem Buch von COMFORT-NEGREPONTIS ([CN]). Die Beweise sind so angelegt, daß möglichst nur solche Ergebnisse verwendet werden, die in [CN] vollständig bewiesen sind. Weitere Quellen für Zitate sind [GJ] und [We].

II.1.2. Definition. Seien A, B Mengen, $C \subset A$ eine Teilmenge von A. Ist $f: A \longrightarrow B$ eine Abbildung, so bezeichnet $f|_C$ die Einschränkung von f auf C.

Ist $g: C \longrightarrow B$ eine Abbildung, und $h: A \longrightarrow B$ eine Abbildung mit $h|_C = g$, so heißt h Fortsetzung von g (auf A).

II.1.3. Definition. Sei R ein topologischer Raum.

(a) $C(R) := \{f: R \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$.

$C^b(R) := \{f \in C(R) \mid f \text{ beschränkt}\}$.

(b) Ein Teilraum R' von R heißt C- bzw. C^*-eingebettet (in R):
$\Leftrightarrow$ Jedes $f \in C(R')$ bzw. jedes $f \in C^b(R')$ besitzt eine stetige Fortsetzung auf R.

II.1.4. Definition. Sei R ein topologischer Raum.

(a) Ist $f \in C(R)$, so heißt $Z(f) := \{r \in R \mid f(r)=0\}$ die Nullstellenmenge von f. $R \setminus Z(f)$ heißt die Konullstellenmenge von f.

(b) $\underline{Z}(R) := \{Z(f) \mid f \in C(R)\}$, $Coz(R) := \{R \setminus Z \mid Z \in \underline{Z}(R)\}$.

(c) Seien A und B Teilmengen von R. Dann heißen A und B vollständig getrennt : $\Leftrightarrow$ Es gibt disjunkte Nullstellenmengen Z_1 und Z_2 mit $A \subset Z_1$ und $B \subset Z_2$.

II.1.5. Bemerkungen. Elementare Eigenschaften von Nullstellenmengen werden z.B. in [GJ:Ch.1.] behandelt. Insbesondere gilt (siehe [GJ:1.14;1.15]):

(a) $\underline{Z}(R)$ ist eine Familie abgeschlossener Mengen, die bezüglich endlicher Vereinigungen und abzählbarer Durchschnitte abgeschlossen ist.

(b) Seien A, B Teilmengen eines topologischen Raumes R. Dann werden A und B vollständig getrennt $\Leftrightarrow$ Es gibt $f \in C(R)$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

II.1.6. Definition. Ein topologischer Raum R heißt vollständig regulär : $\Leftrightarrow$ R ist separiert und zu jedem Punkt $r \in R$ und zu jeder abgeschlossenen Menge $F \subset R$ mit $r \notin F$ gibt es ein $f \in C(R)$ mit $f(r)=1$ und $f|_F = 0$.

II.1.7. Bemerkungen.

(a) Sei R ein separierter topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

(1) R ist vollständig regulär.

(2) R trägt die Initialtopologie bzgl. C(R) oder $C^b(R)$.

(3) R ist homöomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes.

(4) R ist uniformisierbar.

Beweis: (1)$\Leftrightarrow$(2) vgl. [GJ:Th.3.6.] . (1)$\Leftrightarrow$(3) vgl. [B:Ch.IX, §1.5.,prop.3] . (1)$\Leftrightarrow$(4) vgl. [B:Ch.IX,§1.5.,Th.2].

(b) Vollständig reguläre Räume haben gute Permanenzeigenschaften. So ist z.B. jeder Teilraum eines vollständig regulären Raumes vollständig regulär sowie das Produkt vollständig regulärer Räume vollständig regulär.

(c) Definitionsgemäß ist jeder normale Raum vollständig regulär. Weiter ist jeder lokalkompakte Raum vollständig regulär, denn für jeden lokalkompakten Raum existiert die sog. Alexandroff-Kompaktifizierung (siehe [B:Ch.I,§9.8.]) und die Behauptung folgt aus (a).

(d) Ist R ein beliebiger topologischer Raum, so gibt es stets einen vollständig regulären Raum P und eine stetige, surjektive Abbildung $f: R \longrightarrow P$ derart, daß $\tilde{f}: C(P) \longrightarrow C(R); g \longmapsto g \circ f$ ein algebraischer Isomorphismus ist (vgl. [GJ:Th.3.9.]).

VEREINBARUNG: VON NUN AB BEZEICHNE T STETS EINEN VOLLSTÄNDIG REGULÄREN TOPOLOGISCHEN RAUM.

II.1.8. Lemma. Sei $K \subset T$ kompakt. Dann gilt:

(a) K ist C-eingebettet in T.

(b) Ist $F \subset T$ abgeschlossen und $K \cap F = \emptyset$, so werden K und F vollständig getrennt.

Beweis: Siehe [GJ:3.11.] .

II.2. Topologisch beschränkte Mengen

II.2.1. Definition.

(a) $A \subset T$ heißt topologisch beschränkt (bzgl. T) : $\Leftrightarrow$

Für jedes $f \in C(T)$ ist $f|_A \in C^b(A)$.

(b) $\mathfrak{B}(T) := \{A \subset T \mid A$ topologisch beschränkt bzgl. $T\}$.

(c) T heißt pseudokompakt: $\Leftrightarrow$ T ist topologisch beschränkt bzgl. T.

II.2.2. Bemerkung. Wie man unmittelbar einsieht, gilt: Jede Teilmenge und der Abschluß einer topologisch beschränkten Menge sind topologisch beschränkt. Auch endliche Vereinigungen und stetige Bilder topologisch beschränkter Mengen sind topologisch beschränkt.

II.2.3. Definition.

(a) Sei $D \subset T$. Dann heißt D eine in T C-eingebettete Kopie von $\mathbb{N}$: $\Leftrightarrow$ D ist ein abzählbar unendlicher, diskreter, C-eingebetteter Teilraum von T.

(b) $\mathbb{N}(T) := \{D \subset T \mid D$ ist in T C-eingebettete Kopie von $\mathbb{N}\}$.

II.2.4. Bemerkungen.

(a) Ist $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}(T)$, wobei $t_n \neq t_m$ für $n \neq m$, so folgt: Es gibt eine lokalendliche Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, offener Mengen $U_n \subset T$ mit $t_n \in U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn sei $f \in C(T)$ mit $f(t_n)=n$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $U_n := f^{-1}(]n-1/2;n+1/2[)$ geeignet.

(b) Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalendliche Folge nichtleerer, paarweise disjunkter, offener Teilmengen von T. Wählt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ $t_n \in U_n$, so folgt: $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}(T)$.

Beweis: Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C(T)$ mit $f_n(t_n)=1$ und $f(T \setminus U_n)=0$. Dann ist $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f_n \in C(T)$ für jede Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn da $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalendlich ist, gibt es zu $t \in T$ eine Umgebung V von t und $m \in \mathbb{N}$,

so daß $f|_V = \sum_{n \le m} \alpha_n f_n|_V$. Also ist $f|_V \in C(V)$ und die Behauptung folgt aus [B:Ch.1,§3.2,prop.4].

(c) Ist $N \in \mathbb{N}(T)$ und $F \subset T$ abgeschlossen mit $F \cap N = \emptyset$, so folgt: N und F werden vollständig getrennt.

Beweis: (Siehe [GJ:Exc. 3.B].) Da $\overline{Z}(T)$ abgeschlossen ist bzgl. abzb. Durchschnitte, gibt es $f \in C(T)$ mit $Z(f) \supset F$ und $Z(f) \cap N = \emptyset$. Sei $\{t_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von N. Dann gibt es $g \in C(T)$ mit $g(t_n) = 1/f(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $h := f \cdot g \in C(T)$ und $f(F) = 0; f(N) = 1$. Aus II.1.5.(b) folgt die Behauptung.

(d) Insgesamt folgt aus (a)-(c):

$\mathbb{N}(T)$ ist eine Familie abgeschlossener Teilmengen von T, die abgeschlossen ist bzgl. unendlicher Teilmengen und endlicher Vereinigungen.

II.2.5. Lemma. Für eine Teilmenge $A \subset T$ sind äquivalent:

(a) A ist nicht topologisch beschränkt.

(b) Es gibt $N \in \mathbb{N}(T)$ mit $N \subset A$.

(c) Es gibt eine offene lokalendliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von T mit $\text{card}(\{i \in I | U_i \cap A \neq \emptyset\}) = \infty$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (c): Ist $f \in C(T)$ auf A nicht beschränkt, so ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U_n := \{|f| > n-1\}$ geeignet.

(c) $\Rightarrow$ (b): Nach Voraussetzung gibt es eine lokalendliche Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offener Mengen mit $V_n \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Folge $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter offener Mengen mit $W_m \cap A \neq \emptyset$ für $m \in \mathbb{N}$ und eine strikt zunehmende Folge in $\mathbb{N}$ $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$, so daß $W_m \subset V_{n_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $(W_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ebenfalls lokalendlich ist, folgt die Behauptung aus II.2.4.(b).

(b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial. %

II.3. $\overline{\mathbb{E}}$-Reflexionen

II.3.1. Definition. Sei $\mathbb{E}$ eine Klasse vollständig regulärer topologischer Räume, und sei $S \subset T$.

(a) S heißt $\mathbb{E}$-eingebettet in T: $\Leftrightarrow$ Ist $P \in \mathbb{E}$ und $f: S \longrightarrow P$ stetig, so besitzt f eine stetige Fortsetzung $F: T \longrightarrow P$.

(b) T heißt $\mathbb{E}$-fizierung von S: $\Leftrightarrow$ $T \in \mathbb{E}$ und S ist dicht in T.

(c) T heißt $\mathbb{E}$-Reflexion von S: $\Leftrightarrow$ S ist $\mathbb{E}$-eingebettet in T, und T ist eine $\mathbb{E}$-fizierung von S.

II.3.2. Bemerkung. Ist $\mathbb{E} = \{[0;1]\}$, dann ist $\mathbb{E}$-eingebettet offensichtlich äquivalent mit C^*-eingebettet. Ist $\mathbb{E} = \{\mathbb{R}\}$, so ist $\mathbb{E}$-eingebettet gleichwertig mit C-eingebettet. Ist schließlich $\mathbb{E}$ die Klasse der kompakten Räume, so sagt man statt $\mathbb{E}$-fizierung Kompaktifizierung.

II.3.3. Definition. Sei $\mathbb{E}$ eine Klasse vollständig regulärer topologischer Räume. Dann bezeichnet man mit $\overline{\mathbb{E}}$ die Klasse derjenigen Räume, die zu einem abgeschlossenen Teilraum eines Produkts von Räumen, die der Klasse $\mathbb{E}$ angehören, homöomorph sind.

II.3.4. Bemerkung. Wie man sich leicht klarmacht, gilt $\overline{\mathbb{E}} = \overline{\overline{\mathbb{E}}}$. Ist $\mathbb{E} = \{[0;1]\}$, so ist $\overline{\mathbb{E}}$ die Klasse der kompakten Räume. Denn ist K kompakt und ist $F := \{f \in C(K) \mid f(K) \subset [0;1]\}$, so ist $e: K \longrightarrow K' := \prod_{f \in F} [0;1]$; $k \longmapsto (f(k))_{f \in F}$ ein Hömöomorphismus von K auf einen abgeschlossenen Teilraum von K'.

II.3.5. Definition.

(a) T heißt reellkompakt: $\Leftrightarrow T \in \{\mathbb{R}\}$.

(b) T heißt topologisch vollständig: $\Leftrightarrow T \in \overline{\mathbb{E}}$, wobei $\mathbb{E}$ die Klasse der metrischen Räume ist.

II.3.6. Bemerkung. Mit II.3.4. folgt:

T kompakt $\Rightarrow$ T reellkompakt $\Rightarrow$ T topologisch vollständig.

II.3.7. Satz. Sei $\mathbb{E}$ eine Klasse vollständig regulärer topologischer Räume, die die kompakten Räume umfaßt, und für die $\mathbb{E} = \overline{\mathbb{E}}$ gilt. Dann besitzt jeder vollständig reguläre Raum T eine $\mathbb{E}$-Reflexion $\mathbb{E}T$, und $\mathbb{E}T$ ist eindeutig bestimmt im folgenden Sinn: Ist S eine weitere $\mathbb{E}$-Reflexion von T, so gibt es einen Homöomorphismus $h:\mathbb{E}T \longrightarrow S$, der T punktweise festläßt. Insbesondere gilt: $\mathbb{E}T = T \Leftrightarrow T \in \mathbb{E}$.

Beweis: Siehe [CN:1.2;1.3;1.6;1.7].

II.3.8. Definition.

(a) Ist $\mathbb{E}$ die Klasse der kompakten Räume, so heißt $\mathbb{E}T$ Stone-Čech-Kompaktifizierung von T und wird mit βT bezeichnet.

(b) Ist $\mathbb{E}$ die Klasse der reellkompakten Räume, so heißt $\mathbb{E}T$ die Reellkompaktifizierung von T und wird mit υT bezeichnet.

(c) Ist $\mathbb{E}$ die Klasse der topologisch vollständigen Räume, so heißt $\mathbb{E}T$ die topologische Vervollständigung von T. Sie wird mit γT bezeichnet.

II.3.9. Satz. Sei $\mathbb{E}$ eine Klasse vollständig regulärer topologischer Räume, so daß $\overline{\mathbb{E}}$ die kompakten Räume umfaßt. Dann besitzt die $\overline{\mathbb{E}}$-Reflexion eines vollständig regulären Raumes T die folgende Darstellung:

$$\overline{\mathbb{E}}T = \{p \in \beta T \mid T \text{ ist } \mathbb{E}\text{-eingebettet in } T \cup \{p\}\}.$$

Beweis: Siehe [CN:1.16.].

II.3.10. Bemerkung. Wendet man II.3.9. auf $\mathbb{E} = \{\mathbb{R}\}$ an,

was wegen II.3.6. statthaft ist, so erhält man mit II.3.2.:

$$\upsilon T = \{p \in \beta T \mid T \text{ ist C-eingebettet in } T \cup \{p\}.\}.$$

II.3.11. Definition. Sei $\alpha\mathbb{R}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$, ∞ der "unendlich ferne" Punkt dieser Kompaktifizierung (vgl. [B:Ch.1,§9.8]). Sei T gegeben und $f \in C(T)$. Dann besitzt f nach II.3.7. eine stetige Fortsetzung $f^{\beta}: \beta T \longrightarrow \alpha\mathbb{R}$. f^{β} ist eindeutig bestimmt, da T dicht ist in βT. Definiere:

$$\upsilon_f T := \{p \in \beta T \mid f^{\beta}(p) \neq \infty\}.$$

II.3.12. Bemerkung. $\upsilon_f T$ ist ein σ-kompakter, offener, daher (vgl. [B:Ch.1,§9.7;prop.13]) lokalkompakter Teilraum von βT mit $T \subset \upsilon_f T$. Schließlich folgt aus II.3.10.: $\upsilon T = \bigcap_{f \in C(T)} \upsilon_f T$.

II.3.13. Lemma. Sei $A \subset T$ gegeben. Dann gilt:

(a) Für $f \in C(T)$ ist f auf A beschränkt genau dann, wenn $\overline{A}^{\beta T} \subset \upsilon_f T$.

(b) $A \in \mathcal{B}(T) \Leftrightarrow \overline{A}^{\beta T} \subset \upsilon T$.

Beweis: (a): "$\Rightarrow$": Da nach Voraussetzung $\overline{f(A)}^{\mathbb{R}}$ kompakt ist, folgt mit der Stetigkeit von f^{β}: $f^{\beta}(\overline{A}^{\beta T}) \subset \overline{f(A)}^{\alpha\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$.

"$\Leftarrow$": Nach Voraussetzung gilt: $f^{\beta}(\overline{A}^{\beta T}) \subset \mathbb{R}$. Da $\overline{A}^{\beta T}$ kompakt und f^{β} stetig ist, folgt die Behauptung.

(b) folgt aus (a) und der letzten Gleichung in II.3.12..

II.3.14. Definition. T heißt μ-Raum: $\Leftrightarrow$ Ist $A \in \mathcal{B}(T)$, so ist A relativ kompakt in T.

II.3.15. Bemerkung und Definition. Sei $\mathbb{E}$ die Klasse der μ-Räume. Wie man sich leicht überlegt, gilt: $\mathbb{E} = \overline{\mathbb{E}}$, und jeder kompakte Raum ist μ-Raum. Nach II.3.7. besitzt also jeder vollständig reguläre Raum T eine $\mathbb{E}$-Reflexion. Sie wird mit μT bezeichnet und heißt auch der zu T assoziierte

μ-Raum. (Vgl. auch [Sch:II.6.] . Dort findet man eine etwas andre Konstruktion von μT.)

II.3.16. Lemma. Jeder topologisch vollständige Raum T ist μ-Raum.

Beweis: (vgl. [CN: Bem. nach Lemma 7.5].) Sei $A \subset T$ topologisch beschränkt. Wir zeigen: $\overline{A}^{\beta T} \subset T$. Sei dazu $p \in \beta T \setminus T$. Da T topologisch vollständig ist, gibt es nach [CN:Th.4.4.(d)] eine lokalendliche Überdeckung $\mathcal{U}$ von T mit $\mathcal{U} \subset \mathfrak{Coz}(T)$, so daß für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt: $p \notin \overline{U}^{\beta T}$. Sei $\mathcal{V} := \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$. Nach II.2.5. ist $\operatorname{card}(\mathcal{V}) < \infty$. $\Rightarrow \overline{A}^{\beta T} \subset \overline{\bigcup_{U \in \mathcal{V}} U}^{\beta T} = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} \overline{U}^{\beta T}$. Da $p \notin \bigcup_{U \in \mathcal{V}} \overline{U}^{\beta T}$, folgt die Beh..

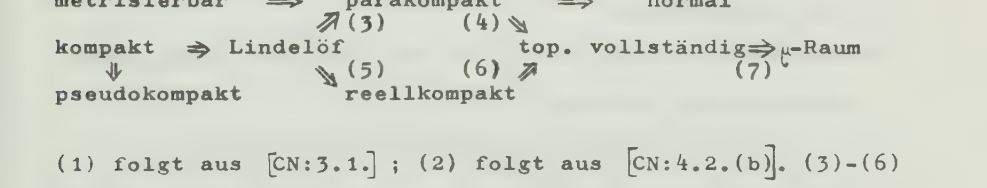
II.3.17. Bemerkungen.

(a) Für T gilt wegen II.3.16., II.3.9. und II.3.6.:

$$T \subset \mu T \subset \gamma T \subset \nu T \subset \beta T.$$

(b) Ist T pseudokompakt, so gilt: $\mu T = \beta T$. Insbesondere ist jeder pseudokompakte μ-Raum kompakt. Dies folgt aus (a) und II.3.7..

II.3.18. Diagramm. In der Klasse der vollständig regulären topologischen Räume gelten die folgenden Implikationen:



(1) folgt aus [CN:3.1.] ; (2) folgt aus [CN:4.2.(b)]. (3)-(6) folgt aus [CN:Th.4.4.] , (6) auch aus II.3.6.. (7) ist II.3.16. Die Frage, ob jeder topologisch vollständige Raum reellkompakt ist, wird durch einen Satz von Katětov-Shirota (vgl. [CN:Th.6.3.;Cor.6.4.]) auf ein mengentheoretisches

Problem reduziert (siehe auch [CN:6.5]). Abgesehen von diesem z.T. ungelösten Problem ist bekannt, daß im obigen Diagramm keine zusätzliche Implikation gilt. Hierzu mögen die folgenden Beispiele genügen:

(8) Der "Ordinalzahlenraum" ist ein normaler, pseudokompakter Raum, der kein μ-Raum ist (vgl. [GJ:8.11;8.12] und II.3.17.).

(9) Die "Planke von Tychonoff" ist ein pseudokompakter Raum, der nicht normal ist (vgl. [GJ:8.20]).

(10) Es gibt μ-Räume, die nicht topologisch vollständig sind. Siehe hierzu VI.2.7.(b).

(11) Es gibt reellkompakte, lokalkompakte Räume, die nicht normal sind. Ein Beispiel findet man in IV.3.7..

II.4. Topologien auf $C(T)$ und $C^b(T)$

II.4.1. Definition. Sei T gegeben. Dann definiert man:

(a) Sei $f:T\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, die auf $B\subset T$ beschränkt ist. Dann: $P_B(f) := \sup\{|f(t)|\,|\, t\in B\}$.

(b) Sei $B\in\mathfrak{B}(T)$. Dann: $P_B: C(T)\longrightarrow \mathbb{R}$; $f\longmapsto P_B(f)$.

(c) P_T: $C^b(T)\longrightarrow \mathbb{R}$; $f\longmapsto P_T(f)$.

II.4.2. Bemerkungen.

(a) Für $B\in\mathfrak{B}(T)$ ist P_B stets eine Halbnorm auf $C(T)$, und P_T ist eine Norm auf $C^b(T)$.

(b) Nach II.3.7. ist T dicht und C-eingebettet in υT. Bezeichnet man für $f\in C(T)$ mit f^υ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von f auf υT, so sieht man sofort, daß $\upsilon: C(T)\longrightarrow C(\upsilon T)$; $f\longmapsto f^\upsilon$ ein Isomorphismus der Algebren ist. Für $B\in\mathfrak{B}(\upsilon T)$ ist $\overline{B}^{\upsilon T}$ kompakt, da υT μ-Raum

ist (II.3.18.), und für $f \in C(T)$ gilt: $P_B(f^\nu) = P_{\overline{B}}{}^{\nu T}(f^\nu)$. Man kann nun für beliebige Familien $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}(\nu T)$ Halbnormsysteme $(P_B \mid B \in \mathfrak{B})$ auf $C(\nu T)$ und damit auf $C(T)$ erklären. Wir werden im weiteren unser Augenmerk auf einige wichtige Spezialfälle richten:

II.4.3. Definition.

(a) $C_b(T)$ sei der Raum $C(T)$, versehen mit der Topologie der beschränkten Konvergenz, d.h. mit der Topologie, die erzeugt wird von der Halbnormfamilie $(P_B \mid B \in \mathfrak{B}(T))$.

(b) $C_c(T)$ sei der Raum $C(T)$, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, d.h. mit der Topologie, die erzeugt wird von der Familie der Halbnormen $(P_K \mid K \subset T$ kompakt).

(c) $C_s(T)$ sei der Raum $C(T)$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, d.h. mit der Topologie, die erzeugt wird von der Halbnormfamilie $(P_F \mid F \subset T$ endlich).

(d) $C_u^b(T)$ sei der Raum $C^b(T)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf T, d.h. mit der Topologie, die von P_T erzeugt wird.

(e) $C_b^b(T)$ (bzw. $C_c^b(T)$, $C_s^b(T)$) bezeichne den Teilraum $C^b(T)$ von $C_b(T)$ (bzw. $C_c(T)$, $C_s(T)$).

II.4.4. Bemerkungen.

(a) $C_b(T)$, $C_c(T)$ und $C_s(T)$ sind separierte, lokalkonvexe Räume. $C_u^b(T)$ ist stets ein Banachraum.

(b) Man macht sich ohne Mühe klar, daß $\varepsilon: C_s(T) \longrightarrow \mathbb{R}^T$; $f \longmapsto (f(t))_{t \in T}$ ein topologischer Isomorphismus auf einen dichten Teilraum von $\mathbb{R}^T$ ist, wobei $\mathbb{R}^T$ mit der üblichen Produkttopologie versehen ist. Ist T abzähl-

bar unendlich, so schreiben wir statt $\mathbb{R}^T$ auch $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

II.4.5. Definition. Für $r\in\mathbb{R}$, $r\geq 0$ definiert man:

$$a_r: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\begin{cases} t & , \text{ falls } |t|\leq r.\\ r\ \mathrm{sign}(t) & , \text{ falls } |t|>r.\end{cases}$$

a_r heißt Abschneidefunktion bei r.

II.4.6. Bemerkungen.

(a) Für jedes $r\in\mathbb{R}$, $r\geq 0$ ist $a_r\in C^b(\mathbb{R})$.

(b) Ist $f\in C(T)$ auf $B\subset T$ beschränkt, so gilt:

$g := a_{P_B(f)}\cdot f \in C^b(T)$ und $g|_B = f|_B$.

(c) $C^b(T)$ ist stets ein dichter Teilraum von $C_b(T)$.

Ist nämlich $f\in C(T)$ und $B\in\mathfrak{B}(T)$, so ist

$g := a_{P_B(f)}\cdot f \in C^b(T)$ und $P_B(f-g)=0$ nach (b).

II.4.7. Bemerkungen.

(a) $C_b^b(T)$, $C_c^b(T)$ und $C_s^b(T)$ sind stets α'-Räume. Das folgt aus I.2.3.(d), da $C_u^b(T)$ ein Banach-, also α'-Raum ist.

(b) Ist T pseudokompakt, so ist wegen (a) $C_b(T)$ (und damit auch $C_c(T)$ und $C_s(T)$) ein α'-Raum.

(c) $C_b(T)$ (und damit auch $C_c(T)$ und $C_s(T)$) ist stets ein α_1'-Raum. Das folgt aus (a), I.2.3.(c), II.4.6.(c) und I.2.5.(a).

II.4.8. Definition. Sei $S\subset T$ gegeben. Dann heißt

$R_S^T: C(T)\longrightarrow C(S);\ f\longmapsto f|_S$ Restriktionsabbildung (von T auf S).

II.4.9. Bemerkungen.

(a) R_S^T läßt sich auffassen als Einschränkung der kanonischen Projektion $pr_S^T : \mathbb{R}^T\longrightarrow\mathbb{R}^S;(f_t)_{t\in T}\longmapsto(f_t)_{t\in S}$ auf $C(T)$.

(b) $R_S^T(C(T)) = \{f \in C(S) \mid f \text{ stetig fortsetzbar auf } T\}$.
Insbesondere gilt: R_S^T surjektiv $\Leftrightarrow$ S C-eingebettet in T.

(c) Aus der vollständigen Regularität von T folgt sofort:
R_S^T injektiv $\Leftrightarrow$ S dicht in T.

(d) Wie unmittelbar klar ist, gilt für $S \subset T$:
$\varepsilon(R_S^T(C(T))) = R^{\mathbb{N}}$ (vgl. II.4.4.(b)) $\Leftrightarrow$ $S \in \mathbb{N}(T)$.

II.4.10. Lemma. Sei $S \subset T$. Dann gilt: $R_S^T(C^b(T))$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $C_u^b(S)$.

Beweis: Siehe [DLP:Lemma G].

II.4.11. Definition.

(a) Sei $S \subset T$. Dann heißt S fast abgeschlossen : $\Leftrightarrow$ $S \cap K$ ist abgeschlossen für alle $K \subset T$, K kompakt.

(b) T heißt k-Raum : $\Leftrightarrow$ Jede fast abgeschlossene Teilmenge von T ist abgeschlossen.

II.4.12. Bemerkungen.

(a) Ist T lokalkompakt, oder besitzt jeder Punkt von T eine abzählbare Basis seiner Umgebungen, so ist T ein k-Raum (vgl. [K:Th.7.13]).

(b) Sei T ein k-Raum, X ein topologischer Raum und $f:T \longrightarrow X$. Dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow$ Für jedes $K \subset T$ kompakt ist $f|_K : K \longrightarrow X$ stetig. (Siehe [E:Th.3.3.21.].)

II.4.13. Lemma. Sei $S \subset T$; $R_S^T : C_c(T) \longrightarrow C_c(S)$ die Restriktionsabbildung. Dann gilt:

(a) R_S^T ist stetig und linear.

(b) $R_S^T(C(T))$ ist dichter Teilraum von $C_c(S)$.

(c) Ist S abgeschlossen, so ist R_S^T ein strikter Morphis-

mus im Sinne von [H:Ch.2,§5;Def.2.] .

(d) Ist S fast abgeschlossen in T, so ist R_S^T relativ fast offen.

Beweis: (a) ist unmittelbar klar.

(b) Sei $f\in C(S)$, $K\subset S$ kompakt und $\varepsilon>0$ gegeben. Nach II.1.8.(a) gibt es $F\in C(T)$ mit $F|_K = f|_K$. $\Rightarrow$ $P_K(f-R_S^T(F))<\varepsilon$.

(c) Siehe z.B. [P:(6,7)] oder [Wi:Sect.13.2,probl.107-109] .

(d) Offenbar genügt es nach I.2.9.(a) zu zeigen: Für $K\subset T$ kompakt und $\varepsilon>0$ gilt:

(1) $\{f\in C(S)\mid P_{K\cap S}(f)<\varepsilon\}\cap R_S^T(C(T)) \subset \overline{R_S^T(\{f\in C(T)\mid P_K(f)<\varepsilon\})}^{R_S^T(C(T))} =$

$=\{f\in C(S)\mid$ f stet. auf T fortsetzbar; für $K'\subset S$, K' kompakt, $\delta>0$ gibt es $h\in C(T)$ mit $P_K(h)<\varepsilon$, so daß $P_{K'}(f-h|_S)<\delta\}$.

O.B.d.A. können S und K als nichtleer angenommen werden.

Ist $K\cap S=\emptyset$, so steht auf der linken Seite von (1) $R_S^T(C(T))$. Seien also $f\in C(S)$, das stetig zu F auf ganz T fortsetzbar ist, $K'\subset S$ (o.B.d.A. $K'\neq\emptyset$) und $\delta>0$ gegeben. Dann gibt es nach II.1.5.(b) und II.1.8.(b) $g\in C(T)$ mit der Eigenschaft, daß $g|_K=0$ und $g|_{K'}=1$ ist. Für $h:=F\cdot g$ gilt: $h\in C(T)$; $h|_K=0$; $h|_{K'}=f$. $\Rightarrow$ (1) im Falle $K\cap S=\emptyset$.

Ist $K\cap S\neq\emptyset$, so ist nach Voraussetzung $K\cap S$ kompakt. Seien $f\in C(S)$, das stetig zu F auf T fortgesetzt werden kann, $P_{K\cap S}(f)<\varepsilon$, $K'\subset S$ kompakt und o.B.d.A. nicht leer, sowie $\delta>0$ gegeben. Definiere $A:=\{t\in T\mid |F(t)|\geq\varepsilon\}$. Nach Definition gilt: $A\cap K\cap S=\emptyset$. Ist $K\cap A=\emptyset$, so gilt für $h:=F$: $h\in C(T)$; $P_K(h)<\varepsilon$; $f=F|_S$. Ist $K\cap A\neq\emptyset$, so wähle man $g\in C(T)$, $g(T)\subset[0;1]$, $g|_{K\cap A}=0$ und $g|_{(K\cap S)\cup K'}=1$. Dann gilt für $h:=F\cdot g$: $h\in C(T)$; $P_K(h)<\varepsilon$ und $h|_{K'}=f|_{K'}$. $\Rightarrow$ (1) im Falle $K\cap S\neq\emptyset$, und (d) ist bewiesen.

%

II.4.14. Folgerungen.

(a) Ist $C_c(T)$ B-vollständig im Sinne von [H:Ch.3.§17;Def.2], so ist T normal.

(b) Ist $C_c(T)$ tonnelierter (bzw. tonnelierter α-, tonnelierter α'-, Baire'scher) Raum, und $S \subset T$ fast abgeschlossen, so folgt: $C_c(S)$ ist tonnelierter (bzw. tonnelierter α-, tonnelierter α'-, Baire'scher) Raum.

Beweis: (a) (Vgl. [Wa:p.267]) Wie man sich leicht überlegt, gilt: Ist E B-vollständig, $f: E \longrightarrow F$ ein strikter Morphismus auf einen separierten, lokalkonvexen Raum F, so ist F B-vollständig (siehe auch [H:Ch.3,§17,prop.5]). Sei also $S \subset T$ ein abgeschlossener Teilraum von T. Dann ist nach II.4.13.(c) $R_S^T(C(T))$ B-vollständig, also insbesondere vollständig nach [H:Ch.3,§17,prop.3(b)], d.h. abgeschlossen in $C_c(S)$, da $C_c(S)$ separiert ist. Da $R_S^T(C(T))$ dicht in $C_c(S)$ nach II.4.13.(b), gilt: $R_S^T(C(T)) = C(S)$. $\Rightarrow$ Beh. nach II.4.9.(b).

(b) (Vgl. auch V.1.1.) Dies folgt aus II.4.13.(a),(b) und (d), der Voraussetzung, sowie aus I.2.9.(b),(c);I.1.7. und I.2.5.(c);I.1.2.(b). ☐

II.5. Charakterisierungen spezieller Eigenschaften der Topologie der kompakten Konvergenz

II.5.1. Definition. T heißt hemikompakt $:\Leftrightarrow$ Es gibt eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von T, so daß es zu jedem Kompaktum $K \subset T$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $K \subset K_n$.

II.5.2. Satz. $C_c(T)$ metrisierbar $\Leftrightarrow$ T hemikompakt.

Beweis: Siehe z.B. [Wi:13.2.4;13.2.3].

II.5.3. Bemerkung. $C_c(T)$ submetrisierbar $\Leftrightarrow$ T fast σ-kompakt; d.h.: Es gibt eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen von T mit $T = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Nullumgebungen in $C_c(T)$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$. $\Rightarrow$ Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gibt es $K_n \subset T$ kompakt und $\varepsilon_n > 0$, so daß $\{f \mid P_{K_n}(f) < \varepsilon_n\} \subset U_n$. $\Rightarrow$ $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n} = T$, da T vollständig regulär ist.

"$\Leftarrow$" Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von T mit $T = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n}$. Dann ist $d: C(T)\times C(T) \longrightarrow \mathbb{R}$; $(f,g) \longrightarrow d(f,g) :=$ $= \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \min\{1; P_{K_n}(f-g)\}$ eine stetige Metrik auf $C_c(T)$. %

II.5.4. Definition.

T heißt $k_{\mathbb{R}}$-Raum : $\Leftrightarrow$ Ist $f: T \longrightarrow \mathbb{R}$ derart, daß $f|_K \in C(K)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset T$, so folgt: $f \in C(T)$.

II.5.5. Satz. $C_c(T)$ vollständig $\Leftrightarrow$ T $k_{\mathbb{R}}$-Raum.

Beweis: Siehe z.B. [Wa:Th.1].

II.5.6. Bemerkungen.

(a) Wie wir schon in II.4.12.(b) angemerkt haben, gilt: T k-Raum $\Rightarrow$ T $k_{\mathbb{R}}$-Raum.

(b) Ist T σ-kompakt und lokalkompakt, so ist $C_c(T)$ vollständig metrisierbar. Dabei folgt die Metrisierbarkeit von $C_c(T)$ aus II.5.2. und [B:Ch.1,§9.9,cor.1.], und die Vollständigkeit von $C_c(T)$ ergibt sich aus (a), II.4.12.(a) und II.5.5.. Genauer gilt:

(c) $C_c(T)$ vollständig metrisierbar $\Leftrightarrow$ T hemikompakter k-Raum. Einen Beweis dieser Aussage findet man bei [Wa:Th.2].

II.5.7. Satz. $C_c(T)$ separabel $\Leftrightarrow$ T ist submetrisierbar mittels der Metrik d, und (T,d) ist separabel.

Beweis: Siehe [Wa:Th.5].

II.5.8. Satz (NACHBIN-SHIROTA-BUCHWALTER-SCHMETS-DE WILDE)

(a) $C_c(T)$ tonneliert $\Leftrightarrow$ T μ-Raum

(b) Es sind äquivalent: (1) $C_c(T)$ ultrabornologisch

(2) $C_c(T)$ bornologisch

(3) T reellkompakt

Beweis: (a): Siehe [N:Th.1.] oder [Sch:III.3.15.(a)] .

(b): Siehe [N:Th.2.] und [Sch:III.2.4.] .

II.5.9. Satz. $C_s(T)$ tonneliert $\Leftrightarrow$ Jedes $B \in \mathfrak{B}(T)$ ist endlich.

Beweis: Siehe [Sch:III.5.5].

II.6. Parakompakte, lokalkompakte Räume

II.6.1. Lemma. Sei $T = \sum_{i\in I} T_i$ die topologische Summe einer Familie $(T_i)_{i\in I}$ von vollständig regulären Räumen T_i. Dann:

$C_c(T)$ ist topologisch isomorph zu $\prod_{i\in I} C_c(T_i)$.

Beweis: Man überlegt sich sehr leicht, daß $E: C_c(T) \longrightarrow \prod_{i\in I} C_c(T_i)$; $f \longmapsto (f|_{T_i})_{i\in I}$ ein topologischer Isomorphismus ist.

II.6.2. Satz. (PFISTER)

T parakompakt, lokalkompakt $\Rightarrow C_c(T)$ pseudovollständig.

Beweis: Sei T ein parakompakter, lokalkompakter Raum. Dann gibt es eine Familie $(T_i)_{i\in I}$, T_i σ-kompakt und lokalkompakt, derart, daß $T = \sum_{i\in I} T_i$ (vgl. [CN:9.9.] oder [B:Ch.1,§9.10,Th.5]). Nach dem vorigen Lemma gilt: $C_c(T)$ ist topologisch isomorph zu $\prod_{i\in I} C_c(T_i)$. Wie wir uns in II.5.6.(c) klargemacht haben, ist jedes $C_c(T_i)$ vollständig metrisierbar, also pseudovollständig. Die Behauptung folgt nun aus I.1.5..

%

Kapitel III

Eine Charakterisierung der α- und α'-Räume in den Klassen $C_c(T)$ und $C_s(T)$

III.1. Der Träger eines stetigen linearen Funktionals auf $C_c(T)$

III.1.1. Lemma. Sei φ ein stetiges lineares Funktional auf $C_c(T)$, d.h.: $\varphi \in C_c(T)'$. Dann existiert die kleinste kompakte Menge $K \subset T$ bzgl. folgender Eigenschaft :

(1) Ist $f \in C(T)$, $f|_K = 0$, so gilt: $\varphi(f) = 0$.

Beweis: (vgl. auch [Sch:III.1.2.]) O.B.d.A. sei $\varphi \neq 0$. Sei $\mathfrak{F} := \{K \mid K \subset T$ kompakt; K erfüllt (1)$\}$. Es genügt zu zeigen: $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ und $\cap \mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$. Daß $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, folgt sofort aus der Stetigkeit von φ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz.

(2) Beh.: Für kompaktes $K \subset T$ gilt:

$$K \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow \{f \in C(T) \mid \text{Es gibt eine Umgebung U von K mit } f|_U = 0\} \subset \{f \in C(T) \mid \varphi(f) = 0\} .$$

Bew. von (2): "$\Rightarrow$" ist trivial. "$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $f \in C(T)$ mit $f|_K = 0$. Da $\varphi|_{C^b(T)} \in C_u^b(T)'$, gibt es ein $c > 0$ derart, daß für alle $g \in C^b(T)$ gilt: $|\varphi(g)| \leq c\, P_T(g)$.

Sei $h := a_{\varepsilon/c} \cdot f$. Dann gilt: $P_T(h) \leq \varepsilon/c$, also $|\varphi(h)| \leq \varepsilon$; $(f-h)|_V = 0$, wobei $V := \{t \in T \mid |f(t)| < \varepsilon/c\}$. Da V eine Umgebung von K ist, folgt mit der Voraussetzung: $\varphi(f-h) = 0$ und es folgt $|\varphi(f)| \leq |\varphi(h)| + |\varphi(f-h)| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung, und (2) ist bewiesen.

(3) Beh.: $\mathfrak{F}$ ist abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte.

Bew. von (3): Seien K_1, $K_2 \in \mathfrak{F}$. Nach (2) genügt es zu zeigen: Ist $f \in C(T)$ derart, daß $f|_U = 0$ für eine offene Umgebung U von $K_1 \cap K_2$, so ist $\varphi(f)=0$. Es kann $K_2 \setminus U \neq \emptyset$ angenommen werden. Dann gibt es nach II.1.8.(b) ein $g \in C(T)$ derart, daß $g|_{K_1}=1$, $g|_{K_2 \setminus U} = 0$. Da $K_2 \in \mathfrak{F}$, folgt aus $f \cdot g|_{K_2} = 0$: $\varphi(f \cdot g) = 0$. Ebenso gilt: $K_1 \in \mathfrak{F}$, $f \cdot (1-g)|_{K_1} = 0 \Rightarrow \varphi(f \cdot (1-g)) = 0$. Insgesamt ergibt sich: $\varphi(f) = \varphi(f \cdot (1-g)) + \varphi(f \cdot g) = 0. \Rightarrow$ (3).

Wir zeigen nun: $\bigcap \mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$.

Nach (2) genügt es zu zeigen: Ist $f \in C(T)$ und U eine offene Umgebung von $\bigcap \mathfrak{F}$ derart, daß $f|_U = 0$, so folgt: $\varphi(f)=0$. Da $T \setminus U$ abgeschlossen ist, und da die Elemente von $\mathfrak{F}$ kompakt sind, folgt: Es gibt $K_1, \ldots, K_n \in \mathfrak{F}$ derart, daß $\bigcap_{i \leq n} K_i \subset U$. Da $\bigcap_{i \leq n} K_i \in \mathfrak{F}$ nach (3) und $f|_{\bigcap_{i \leq n} K_i} = 0$ nach Voraussetzung, folgt $\varphi(f)=0$, und das Lemma ist bewiesen. %

III.1.2. Definition. Sei $\varphi \in C_c(T)'$.

(a) Die kleinste kompakte Teilmenge von T, die die Eigenschaft (1) aus III.1.1. besitzt, heißt der Träger von φ. Sie wird mit $\mathrm{trg}(\varphi)$ bezeichnet.

(b) $\|\varphi\| := \sup \{ |\varphi(f)| \mid f \in C^b(T);\ P_T(f) \leq 1 \}$.

III.1.3. Bemerkungen. Seien $\varphi \in C_c(T)'$ und $\mathrm{trg}(\varphi) \subset A \subset T$ gegeben.

(a) Aus III.1.1.(1) folgt sofort: Sind $f, g \in C(T)$ und gilt: $f|_A = g|_A$, so folgt: $\varphi(f) = \varphi(g)$.

(b) Da $\varphi|_{C^b(T)} \in C_u^b(T)'$, gilt: $\|\varphi\| < \infty$.

(c) Ist $f \in C(T)$ auf A beschränkt, so gilt: $|\varphi(f)| \leq \|\varphi\| \, P_A(f)$. Das folgt aus (a), II.4.6.(b) und der Definition von $\|\varphi\|$.

(d) Sei $t \in T$. Definiere: δ_t: $C(T) \longrightarrow \mathbb{R}$; $f \longmapsto f(t)$. Dann

gilt: $\delta_t \in C_s(T)'$, also insbesondere $\delta_t \in C_c(T)'$, $trg(\delta_t)=\{t\}$ und $\|\delta_t\| = 1$.

III.1.4. Lemma. Seien $\varphi \in C_c(T)'$ und $G \subset T$ offen mit $G \cap trg(\varphi) \neq \emptyset$ gegeben. Dann gibt es $f \in C^b(T)$, so daß $\varphi(f)=1$ und $trg(f) \subset G$, wobei wie üblich für $f \in C(T)$ $trg(f) := \overline{\{t \in T \mid f(t) \neq 0\}}$ definiert ist.

Beweis: Wähle V und W offen in T derart, daß $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset G$ und $V \cap trg(\varphi) \neq \emptyset$. Da $trg(\varphi) \setminus V$ kein Träger von φ ist, gibt es $g \in C(T)$ mit $g|_{trg(\varphi)\setminus V} = 0$ und $\varphi(g) \neq 0$. Weiter kann $g \in C^b(T)$ gewählt werden (vgl. II.4.6.(b) sowie III.1.3.(a)). $K := \overline{V} \cap trg(\varphi)$ ist nicht leer und kompakt. O.B.d.A. kann nun $G \neq T$ angenommen werden. Dann gibt es nach II.1.8.(b) $h \in C^b(T)$ mit $h|_K = 1$ und $h|_{T\setminus W} = 0$. $f := g \cdot h$ leistet das Gewünschte; denn $f|_{trg(\varphi)} = g|_{trg(\varphi)}$, also $\varphi(f) \neq 0$ und $trg(f) \subset \overline{W} \subset G$. %

III.1.5. Definition. Sei $B \subset C_c(T)'$. Dann heißt $trg(B) := \overline{\bigcup_{\varphi \in B} trg(\varphi)}$ der Träger von B.

III.1.6. Bemerkung. Für $B \subset C_c(T)'$ ist trg(B) die kleinste abgeschlossene Teilmenge von T mit folgender Eigenschaft: Ist $f \in C(T)$ mit $f|_{trg(B)} = 0$, so ist $\varphi(f) = 0$ für alle $\varphi \in B$. Das folgt sofort aus obigem Lemma III.1.4..

III.1.7. Definition.

Sei $d: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}; \quad (m;n) \longmapsto 1/2 \cdot (m+n)(m+n+1)+m$.

III.1.8. Bemerkung. d ist bijektiv und beschreibt das bekannte Abzählungsverfahren von $\mathbb{N}^2$ nach CANTOR. Weiter ist d strikt zunehmend in den Variablen m und n; d.h.: Sind $m, m' \in \mathbb{N}, m<m'$ und $n \in \mathbb{N}$, so folgt: $d(m,n)<d(m',n)$. Sind n,

$n' \in \mathbb{N}$, $n<n'$ und $m \in \mathbb{N}$, so folgt: $d(m,n)<d(m,n')$.

III.1.9. Lemma.

Sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Dann gibt es eine abzählbare Familie $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlicher Teilmengen von $\mathbb{N}$ derart, daß gilt:

(a) $M_n \subset N_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $M_m \cap M_n = \emptyset$ für $m \neq n$.

Beweis: Wir definieren induktiv eine strikt zunehmende Folge $(x_{d(m,n)})_{m,n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen $x_{d(m,n)}$ derart, daß $x_{d(m,n)} \in N_n$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$:

$$d(m,n)=0 \quad : x_0 := \min N_0 .$$

$$d(m,n)-1 \longmapsto d(m,n): \; x_{d(m,n)} := \min(\{i \in \mathbb{N} \mid i > x_{d(m,n)-1}\} \cap N_n).$$

Dann leistet $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $M_n := \{x_{d(m,n)} \mid m \in \mathbb{N}\}$ das Gewünschte. %

III.1.10. Lemma.

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $C_c(T)'$, und es gebe ein $f \in C(T)$, so daß f auf allen $\mathrm{trg}(B_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ unbeschränkt ist. Dann gibt es $g \in C(T)$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $\sup\{|\mu(g)| \mid \mu \in B_n\} = \infty$.

Beweis: Sei $f \in C(T)$ auf allen $\mathrm{trg}(B_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ unbeschränkt. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß alle B_n abzählbar unendlich sind; also $B_n = \{\mu_m^n \mid m \in \mathbb{N}\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $G_k := \{t \in T \mid |f(t)|>k\}$. Dann ist $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, lokalendliche Folge nicht leerer, offener Teilmengen von T mit

(1) $\mathrm{trg}(B_n) \cap G_k \neq \emptyset$ für alle $n,k \in \mathbb{N}$.

Sei d wie in III.1.7. definiert. Dann:

(2) Behauptung: Es gibt strikt zunehmende Teilfolgen $(k_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ $(n\in\mathbb{N})$ und $(l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen derart, daß für $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ gilt:

(2a) $\mathrm{trg}(\nu_m^n)\cap H_{d(m,n)}\neq\emptyset$.

(2b) Für alle $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ mit $d(i,j)<d(m,n)$ ist $\mathrm{trg}(\nu_i^j)\cap H_{d(m,n)}=\emptyset$.

Dabei sind hier wie auch im folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise $\nu_m^n:=\mu_{k_m^n}^n$ und $H_{d(m,n)}:=G_{l_{d(m,n)}}$ definiert.

Bew. von (2) erfolgt durch Induktion. Dabei werden im $d(m,n)$-ten Schritt die Elemente k_m^n und $l_{d(m,n)+1}$ definiert.

$d(m,n)=0$: Also ist $m=n=0$. Definiere $l_o:=0$. Nach (1) gibt es dann $q_1\in\mathbb{N}$ mit $\mathrm{trg}(\mu_{q_1}^o)\cap G_o\neq\emptyset$. Definiere $k_o^o:=q_1$. $\Rightarrow$ (2a). Da $\mathrm{trg}(\nu_o^o)$ kompakt ist, gibt es $q_2\in\mathbb{N}$, $q_2>0$ derart, daß $\mathrm{trg}(\nu_o^o)\cap G_{q_2}=\emptyset$. Definiere $l_1:=q_2$. Damit ist (2b) für $(m,n)=(0,1)$ erfüllt.

$d(m,n)-1 \longmapsto d(m,n)$: Nach Induktionsvoraussetzung sind für $(m',n')\in\mathbb{N}^2$ mit $d(m',n')<d(m,n)$ $\mathrm{trg}(\nu_{m'}^{n'})$ und $H_{d(m',n')}$ schon so bestimmt, daß (2a) und (2b) für diese (m',n') erfüllt sind. Weiter ist $H_{d(m,n)}$ nach Induktionsvoraussetzung gegeben und es gilt: $\mathrm{trg}(\nu_{m'}^{n'})\cap H_{d(m,n)}=\emptyset$. Da die Elemente von B_n kompakt sind, gibt es wegen (1) ein $q_1\in\mathbb{N}$, $q_1>\max\{k_{m'}^{n'}\mid d(m',n')<d(m,n)\}$, mit $\mathrm{trg}(\mu_{q_1}^n)\cap H_{d(m,n)}\neq\emptyset$. $k_m^n:=q_1$ erfüllt dann (2a). Wieder wegen der Kompaktheit von $\mathrm{trg}(\nu_m^n)$ gibt es $q_2\in\mathbb{N}$, $q_2>l_{d(m,n)}$, so daß $\mathrm{trg}(\nu_m^n)\cap G_{q_2}=\emptyset$. Definiere $l_{d(m,n)+1}:=q_2$. Da $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist (2b) für alle $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ mit $d(i,j)\leq d(m,n)$ erfüllt.

Insgesamt ist damit (2) bewiesen.

Nach (2a) und III.1.4. gibt es eine Folge $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $g_p \in C^b(T)$, mit:

(3) $trg(g_p) \subset H_p$ für alle $p\in\mathbb{N}$.

(4) $\nu_m^n(g_{d(m,n)}) = 1$ für alle $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.

Da die Folge $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge der Folge $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls lokalendlich ist, ist $\sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p g_p \in C(T)$ für jede Folge $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha_p \in \mathbb{R}$ (vgl. II.2.4.(b)).

Wegen (4) ist es möglich, die Folge $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ so zu wählen, daß für alle $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ gilt:

(5) $\nu_m^n\left(\sum_{p=0}^{d(m,n)} \alpha_p g_p\right) = d(m,n)$.

$g := \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p g_p$ mit α_p wie in (5) gewählt erfüllt dann die Behauptung des Lemmas. Denn sei $n\in\mathbb{N}$. Dann:

$$\sup\left\{|\mu(g)| \,\middle|\, \mu\in B_n\right\} \geq \sup_m |\nu_m^n(g)| = \sup_m \left|\nu_m^n\left(\sum_{p=0}^{d(m,n)} \alpha_p g_p\right)\right| =$$

$$= \sup_m d(m,n) = \infty \quad \text{wegen (2b) und (3).}$$

%

III.1.11. Folgerung. Sei $B \subset C_c(T)'$ $\sigma(C_c(T)', C_c(T))$-beschränkt. Dann ist $trg(B)$ topologisch beschränkt.

Beweis: Setze in III.1.10. $B_n := B$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

III.1.12. Bemerkung. Ein Beweis von III.1.11. findet sich auch in [N:Bew. von Th.1] und in [Sch:III.3.5.(b)].

III.2. $\tau\alpha$-Räume und $\tau\alpha'$-Räume

III.2.1. Definition. T heißt $\tau\alpha$-Raum : $\Leftrightarrow$ Zu jeder monoton fallenden Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht topologisch beschränkter Teilmengen von T gibt es $f\in C(T)$, das auf allen A_n unbeschränkt ist.

III.2.2. Satz. Für T sind äquivalent:

(a) T ist $\tau\alpha$-Raum.

(b) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Teilmengen von T mit

(1) Für jedes $f\in C(T)$ gibt es $n\in\mathbb{N}$, so daß f auf A_n beschränkt ist,

so folgt: Es gibt $n\in\mathbb{N}$, so daß A_n topologisch beschränkt ist.

(c) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Teilmengen von T mit

(2) Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $\overline{A}_n^{\beta T}\cap(\beta T\setminus\upsilon T)\neq\emptyset$,

so folgt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n^{\beta T}\cap(\beta T\setminus\upsilon T)\neq\emptyset$.

(d) Zu jeder Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen mit $N_n\in\mathbb{N}(T)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}(T)$ derart, daß $N\cap N_n\neq\emptyset$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$.

Beweis: (a) $\Leftrightarrow$ (b) ist klar.

(a)$\Rightarrow$(c): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge von Teilmengen von T, die (2) erfüllt. Nach II.3.13.(b) ist kein A_n topologisch beschränkt. Nach Voraussetzung gibt es $f\in C(T)$, das auf allen A_n unbeschränkt ist. Also gilt nach II.3.13.(a): $\overline{A}_n^{\beta T}\cap(\beta T\setminus\upsilon_f T)\neq\emptyset$. Da $\beta T\setminus\upsilon_f T$ kompakt und $(\overline{A}_n^{\beta T}\cap(\beta T\setminus\upsilon_f T))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durch-

schnittseigenschaft ist, gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \upsilon_f T) \neq \emptyset$. $\Rightarrow$ Behauptung nach II.3.12..

(c)$\Rightarrow$(a): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge nicht topologisch beschränkter Teilmengen von T. Dann ist $\overline{A_n}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \upsilon T) \neq \emptyset$ für alle $n\in\mathbb{N}$ nach II.3.13.(b). Nach Voraussetzung gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \upsilon T) \neq \emptyset$. Also gibt es nach II.3.12. ein $f\in C(T)$, so daß $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \upsilon_f T) \neq \emptyset \Rightarrow$ Beh. nach II.3.13.(a).

(a)$\Rightarrow$(d): Sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von T mit $N_n \in \mathcal{N}(T)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Definiere für $m\in\mathbb{N}$: $A_m := \bigcup_{n\geq m} N_n$. Dann ist nach II.2.5. $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge nicht topologisch beschränkter Teilmengen von T. Nach Voraussetzung gibt es $f\in C(T)^+, f\geq 0$, das auf allen A_m unbeschränkt ist. Wähle $t_m \in A_m$ für $m\in\mathbb{N}$ derart, daß $f(t_m)+1<f(t_{m+1})$. Dann ist $N := \{t_m \mid m\in\mathbb{N}\} \in \mathcal{N}(T)$ nach II.2.4.(b), und es gilt: $N\cap N_n \neq \emptyset$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$.

(d)$\Rightarrow$(a): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge nicht topologisch beschränkter Teilmengen von T. Wegen II.2.5. gibt es für jedes $n\in\mathbb{N}$ ein $N_n \in \mathcal{N}(T)$ mit $N_n \subset A_n$. Wegen III.1.9. und II.2.4.(d) können die N_n ($n\in\mathbb{N}$) paarweise disjunkt angenommen werden. Nach Voraussetzung gibt es $N\in\mathcal{N}(T)$ derart, daß $N\cap N_n \neq \emptyset$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$. Sei $\{t_m \mid m\in\mathbb{N}\}$ eine Abzählung von N. Wähle $f\in C(T)$ mit $f(t_m) = m$ ($m\in\mathbb{N}$). Dann ist f auf allen A_n unbeschränkt, was zu zeigen war. %

III.2.3. Definition. T heißt $\tau\alpha'$-Raum : $\Leftrightarrow$ Zu jeder Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht topologisch beschränkter Teilmengen von T gibt es $f\in C(T)$, das auf allen A_n unbeschränkt ist.

III.2.4. Satz. Für T sind äquivalent:

(a) T ist $\tau\alpha'$-Raum.

(b) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von T mit

(1) Für jedes $f\in C(T)$ gibt es $n\in\mathbb{N}$, so daß f auf A_n beschränkt ist,

so folgt: Für ein $n\in\mathbb{N}$ ist A_n topologisch beschränkt.

(c) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von T mit

(2) Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $\overline{A}_n^{\beta T}\cap(\beta T\setminus\nu T)\neq\emptyset$,

so folgt: Es gibt ein $f\in C(T)$ mit $\overline{A}_n^{\beta T}\cap(\beta T\setminus\nu_f T)\neq\emptyset$ für $n\in\mathbb{N}$.

(d) Zu jeder Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen mit $N_n\in\mathbb{N}(T)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}(T)$ derart, daß gilt:

$$\text{card}\,(N\cap N_n)=\infty \text{ für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Beweis: (a) $\Leftrightarrow$ (b) ist klar. (a) $\Leftrightarrow$ (c) folgt aus II.3.12. und II.3.13. (vgl. auch den Beweis "(a) $\Leftrightarrow$ (c)" in III.2.2.).

(a)$\Rightarrow$(d): Sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von T mit $N_n\in\mathbb{N}(T)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Da kein N_n topologisch beschränkt ist, gibt es nach Voraussetzung ein $f\in C(T)$, $f\geq 0$, das auf allen N_n ($n\in\mathbb{N}$) unbeschränkt ist. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $\{t^n_m \mid m\in\mathbb{N}\}$ eine Abzählung von N_n. Ist d wie in III.1.7. erklärt, so kann man für $n\in\mathbb{N}$ induktiv strikt zunehmende Teilfolgen $(m^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen definieren, so daß gilt: Sind k, k', n, n'$\in\mathbb{N}$ mit $d(m_k,n)<d(m_{k'},n')$, so ist $f(t^{\,n}_{m^n_k})<$ $<f(t^{\,n'}_{m^{n'}_{k'}})-1$. (Zum Beweis vgl. den Beweis von (2) in III.1.10..) Dann ist $\{t^{n_n}_{m_k} \mid n,k\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{N}(T)$ nach II.2.4.(b), und es folgt die Behauptung.

(d)$\Rightarrow$(a): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht topologisch beschränkter Teilmengen von T. Wegen II.2.5. enthält jedes A_n ein $N_n\in\mathbb{N}(T)$. Nach III.1.9. können die N_n ($n\in\mathbb{N}$) o.B.d.A. paarweise disjunkt angenommen werden. Sei $N\in\mathbb{N}(T)$ so, daß $\text{card}(N\cap N_n)=\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Sei $\{t_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ eine Abzählung von N. Wähle $f\in C(T)$ so, daß $f(t_n)=n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Behauptung.

%

III.3. Eine Charakterisierung der α- und α'-Räume in den Klassen $C_c(T)$ und $C_s(T)$

III.3.1. Satz.

Sei T gegeben, und $\mathcal{P}$ sei eine lokalkonvexe Topologie auf C(T), die feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz und gröber als die Topologie der kompakten Konvergenz ist. Dann sind äquivalent:

(a) $(C(T);\mathcal{P})$ ist α'-Raum.

(b) T ist $\tau\alpha'$-Raum.

Beweis: Da sich, wie wir schon in I.2.3.(d) bemerkt haben, die Eigenschaft, α'-Raum zu sein, auf gröbere lokalkonvexe Topologien überträgt, genügt es offensichtlich, folgende Aussagen zu beweisen:

(1) $C_s(T)$ α'-Raum $\Rightarrow$ T $\tau\alpha'$-Raum.

(2) T $\tau\alpha'$-Raum $\Rightarrow$ $C_c(T)$ α'-Raum.

Bew. zu (1): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von T, die die Eigenschaft (1) aus III.2.4.(b) besitzt, d.h.: Zu jedem $f\in C(T)$ gibt es $n\in\mathbb{N}$, so daß f auf A_n beschränkt ist. Definiere für $n\in\mathbb{N}$: $B_n := \{\mu\in C_s(T)' \mid \operatorname{trg}(\mu)<A_n; \|\mu\|\leq 1\}$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $C_s(T)'$ derart, daß es zu jedem $f\in C(T)$ ein $m\in\mathbb{N}$ gibt mit $\sup\{|\mu(f)| \mid \mu\in B_m\}<\infty$. Denn sei $f\in C(T)$. Wähle $m\in\mathbb{N}$ so, daß $P_{A_m}(f)<\infty$. Dann gilt $|\mu(f)| \leq P_{A_m}(f)$ für alle $\mu\in B_m$ nach Definition von B_m. Nach Voraussetzung und I.2.4. gibt es $n_o\in\mathbb{N}$ derart, daß B_{n_o} $\sigma(C_s(T)',C(T))$ beschränkt ist. Nach III.1.11. ist dann $\operatorname{trg}(B_{n_o})$ topologisch beschränkt. Da $A_{n_o} \subset \operatorname{trg}(B_{n_o})$ (vgl. III.1.3.(d)), folgt die Behauptung aus III.2.4., und (1) ist bewiesen.

Bew. zu (2): Nach I.2.4. genügt es zu zeigen:

Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $C_c(T)'$ derart, daß kein B_n $\sigma(C_c(T)',C(T))$-beschränkt ist, so gilt:

(3) Es gibt $f\in C(T)$, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ $\sup\{|\mu(f)|\,|\,\mu\in B_n\}=\infty$.

Sei also $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $C_c(T)'$, so daß kein B_n $\sigma(C_c(T)',C(T))$-beschränkt ist. Dann gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ $f_n\in C(T)$ und eine Folge $(\mu_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\mu_m^n\in B_n$ $(m\in\mathbb{N})$ mit

(4) $|\mu_m^n(f_n)|\geq m$ für alle $m,n\in\mathbb{N}$.

Definiere nun eine Zerlegung von $\mathbb{N}$:

$N:=\{n\in\mathbb{N}\mid \operatorname{trg}(\{\mu_m^n\,|\,m\in\mathbb{N}\})$ ist topologisch beschränkt$\}$.

$M:=\mathbb{N}\setminus N$

$M_1:=\{n\in M\mid \sup\{\|\mu_m^n\|\,|\,m\in\mathbb{N}\}=\infty\}$. $\qquad M_2:=M\setminus M_1$.

Wegen (4) kann angenommen werden, daß $\|\mu_m^n\|\geq 1$ für alle $m\in\mathbb{N}$ und $n\in M_1$ wahr ist. Definiere:

$$\nu_m^n := \begin{cases} \mu_m^n & ,\text{falls } n\in N\cup M_2 \\ (1/\|\mu_m^n\|)\cdot\mu_m^n & ,\text{falls } n\in M_1. \end{cases} \qquad m\in\mathbb{N}$$

Es gilt: $\operatorname{trg}(\nu_m^n)=\operatorname{trg}(\mu_m^n)$ für alle $m,n\in\mathbb{N}$. Definiere abschließend für $n\in\mathbb{N}$: $C_n:=\{\nu_m^n\,|\,m\in\mathbb{N}\}$.

Wir unterscheiden nun drei Fälle, die sich gegenseitig ausschließen:

1. Fall: $N=\mathbb{N}$; 2. Fall: $N=\emptyset$; 3. Fall: $\emptyset\neq N\neq\mathbb{N}$.

Sei zunächst $N\neq\emptyset$. Da $\operatorname{trg}(C_n)\in\mathfrak{B}(T)$ für $n\in N$ nach Definition, kann wegen II.4.6.(b) und III.1.3.(a) f_n in (4) für $n\in N$ in $C^b(T)$ gewählt werden. Da $C^b(T)$ dicht in $C_c(T)$ ist nach II.4.6.(c), identifizieren wir in kanonischer Weise $C_c(T)'$ und $C_c^b(T)'$. $\Rightarrow$ Für $n\in N$ ist C_n nicht $\sigma(C_c^b(T)',C^b(T))$-beschränkt. Da $C_c^b(T)$ α'-Raum ist wegen II.4.7.(a), folgt aus I.2.4.:

(5) Es gibt $g \in C^b(T)$, so daß für alle $n \in N$ $\sup\{|\nu_m^n(g)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Ist $N = \mathbb{N}$, so ist (3) im Fall 1 bewiesen.

Sei nun $N \neq \mathbb{N}$, also $M \neq \emptyset$.

Für $n \in M$ ist $\mathrm{trg}(C_n)$ nicht topologisch beschränkt. Da T nach Voraussetzung $\tau\alpha'$-Raum, gibt es eine reellwertige, stetige Funktion auf T, die für $n \in M$ auf $\mathrm{trg}(C_n)$ unbeschränkt ist. Dann folgt aber mit Lemma III.1.10.:

(6) Es gibt $h \in C(T)$, so daß für alle $n \in M$ $\sup\{|\nu_m^n(h)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Ist $M = \mathbb{N}$, also $N = \emptyset$, so ist die Aussage (3) im Fall 2 bewiesen, denn dann gilt auch $\sup_{m \in \mathbb{N}} |\mu_m^n(h)| = \infty$ für alle $n \in M_1$.

Im Fall 3 schließt man folgendermaßen weiter:

Definiere für $n \in N$: $S_n := \{r \in \mathbb{R} \mid \sup\{|\nu_m^n(g - rh)| \mid m \in \mathbb{N}\} < \infty\}$.

(7) Zwischenbehauptung: $\mathrm{card}(S_n) \leq 1$ für alle $n \in N$.

Bew. von (7): Sei $n \in N$, und $S_n \neq \emptyset$. Dann: $\sup\{|\nu_m^n(h)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$, da $\sup\{|\nu_m^n(g)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$ wegen (5). Seien nun $r_1, r_2 \in S_n$. $\Rightarrow$

$$|r_1 - r_2| \, |\nu_m^n(h)| = |\nu_m^n(r_1 h - g + g - r_2 h)| \leq |\nu_m^n(g - r_1 h)| + |\nu_m^n(g - r_2 h)| \leq$$

$$\leq c_1 + c_2 < \infty \text{ für alle } m \in \mathbb{N}. \Rightarrow r_1 = r_2 \Rightarrow (7).$$

Sei nun $s \in \mathbb{R} \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \cup \{0\})$, $f := g - sh$. Dann erfüllt $f \in C(T)$ die Aussage (3) im Falle 3, denn:

Ist $n \in N$, so gilt $\sup\{|\mu_m^n(f)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$ nach Definition von s und ν_m^n.

Ist $n \in M_1$, so ist wegen $\|\nu_m^n\| = 1$ und III.1.3.(b):

$\sup\{|\nu_m^n(g)| \mid m \in \mathbb{N}\} < \infty$. Da $\|\mu_m^n\| \geq 1$ nach Def. und $\sup\{|\nu_m^n(h)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$ nach (6), folgt:

$\sup\{|\mu_m^n(f)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \sup\{\|\mu_m^n\| \, |\nu_m^n(g - sh)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$.

Ist $n \in M_2$, so gilt wegen $\sup\{|\mu_m^n(g)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \sup\{|\nu_m^n(g)| \mid m \in \mathbb{N}\} \leq$

$\leq \sup\{\|\mu_m^n\| \mid m \in \mathbb{N}\} \, P_T(g) < \infty$ und $\sup\{|s \cdot \mu_m^n(h)| \mid m \in \mathbb{N}\} =$

$= \sup\{|s \cdot \nu_m^n(h)| \mid m \in \mathbb{N}\} = \infty$ die gewünschte Gleichung (3).

Damit ist (3) vollständig bewiesen, und es folgt (2).

%

III.3.2. Satz.

Sei T gegeben und $\mathcal{P}$ sei eine lokalkonvexe Topologie auf C(T), die feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz und gröber als die Topologie der kompakten Konvergenz ist. Dann sind äquivalent:

(a) $(C(T) ; \mathcal{P})$ ist α-Raum.

(b) T ist $\tau\alpha$-Raum.

Beweis: Da sich die Eigenschaft, α-Raum zu sein, auf gröbere lokalkonvexe Topologien überträgt, genügt es, folgende Aussagen zu zeigen:

(1) $C_s(T)$ α-Raum $\Rightarrow$ T $\tau\alpha$-Raum.

(2) T $\tau\alpha$-Raum $\Rightarrow$ $C_c(T)$ α-Raum.

Der Beweis von (1) ist völlig analog zu dem Beweis von (1) in III.3.1.. Man hat nur zu beachten, daß man, da mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, wegen des Zusatzes zu Lemma I.2.4. die schwächere Voraussetzung "$C_s(T)$ α-Raum" anwenden kann, so daß aus III.2.2. die Behauptung folgt. Auch zum Beweis von (2) könnte man auf den Beweis von (2) in III.3.1. verweisen. Wir stellen jedoch hier eine etwas andere Argumentationsweise ausführlicher dar:

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Mengen in $C_c(T)'$ und kein B_n sei $\sigma(C_c(T)', C(T))$-beschränkt. Nach I.2.4. genügt es, zu zeigen:

(3) Es gibt $f\in C(T)$, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ $\sup\{|\mu(f)| \mid \mu\in B_n\} = \infty$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Für kein $n\in\mathbb{N}$ ist $\mathrm{trg}(B_n)$ topologisch beschränkt. Da T $\tau\alpha$-Raum ist, gibt es eine reellwertige, stetige Funktion auf T, die auf allen $\mathrm{trg}(B_n)$ $(n\in\mathbb{N})$ unbeschränkt ist. (3) folgt

dann aus III.1.10..

Fall 2: Es gibt $m\in\mathbb{N}$, so daß $trg(B_m)\in\mathfrak{B}(T)$.

Sei $D:= R^T_{trg(B_m)}(C(T))$. Dann gilt: $D= R^T_{trg(B_m)}(C^b(T))\subset$ $\subset C^b(trg(B_m))$. Versieht man D mit der Norm $P_{trg(B_m)}$, so ist D ein Banachraum nach II.4.10., also insbesondre ein α-Raum. Definiere: $E: B_m \longrightarrow D'; \mu \longmapsto \hat{\mu}$ mit $\hat{\mu}(g):= \mu(G)$, wobei für $g\in D$ G eine stetige Fortsetzung von g auf T sei. Nach III.1.3.(a) ist E wohldefiniert. Da es zu jedem $n\geq m$ ein $g_n\in D$ gibt mit $\sup\{|\hat{\mu}(g_n)|\,|\,\hat{\mu}\in E(B_n)\} = \infty$, gibt es ein $f\in D$, so daß für alle $n\geq m$ $\sup\{|\hat{\mu}(f)|\,|\hat{\mu}\in E(B_n)\}=\infty$. Ist F eine stetige Fortsetzung von f auf T, so gilt nach Definition von E: $\sup\{|\mu(F)|\,|\,\mu\in B_n\}=\infty$ für alle $n\geq m$. Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt (3) im Falle 2, und (2) ist bewiesen. %

III.3.3. Frage 1: Sind die Sätze III.3.1. und III.3.2. noch richtig, wenn man für $\mathcal{P}$ lokalkonvexe Topologien zuläßt, die feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz und gröber als die Topologie der beschränkten Konvergenz sind?

III.3.4. Bemerkung. $C_b(T)$ ist stets ein α'_b-Raum.

Beweis: Ist T pseudokompakt, so folgt die Behauptung aus II.4.7.(b). Ist T nicht pseudokompakt, so ist $N(T)\neq\emptyset$ nach II.2.5.. Sei $\{t^n_m\,|\,m,n\in\mathbb{N}\}\in N(T)$, wobei $t^n_m\neq t^{n'}_{m'}$, falls $(m,n)\neq(m',n')$. Nach I.2.4., insbesondre dem dortigen Zusatz, zeigen wir:

(1) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht $\sigma(C_b(T)',C(T))$-beschränkten, absorbierenden Teilmengen von $C_b(T)'$, so gibt es ein $f\in C(T)$, so daß für alle $n\in\mathbb{N}$ $\sup\{|\mu(f)|\,|\mu\in B_n\}=\infty$.

Sei also $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht $\sigma(C_b(T)',C(T))$-be-

schränkten, absorbierenden Teilmengen von $C_b(T)'$. Dann gibt es zu jedem $m\in\mathbb{N}$ und zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $\alpha_m^n \in \mathbb{R}$, $\alpha_m^n > 0$, so daß $\alpha_m^n \, \delta_{t_m^n} \in B_n$ ($\delta_{t_m^n}$ wie in III.1.3.(d)). Wähle $f\in C(T)$ derart, daß $f(t_m^n)=m\cdot(1/\alpha_m^n)$ für $m, n\in\mathbb{N}$. Dann gilt für $n\in\mathbb{N}$: $\sup\{|\mu(f)| \mid \mu\in B_n\} \geq \sup\{|\alpha_m^n \, \delta_{t_m^n}(f)| \mid m\in\mathbb{N}\} = \sup\{m \mid m\in\mathbb{N}\} = \infty$. Also ist (1) richtig, und der Beweis ist beendet.

%

Kapitel IV

Folgerungen und Beispiele

IV.1. $\tau\alpha$-Räume von punktweise abzählbarem Typ

IV.1.1. Lemma. Sei T ein $\tau\alpha$-Raum, und $A \subset T$ sei topologisch beschränkt. Besitzt A eine abzählbare Basis seiner Umgebungen, so gibt es eine topologisch beschränkte Umgebung von A.

Beweis: Wir wählen mit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Umgebungen von A. O.B.d.A. kann die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend gewählt werden. Dann erfüllt die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung (1) aus III.2.4.. Denn sei $f\in C(T)$. Dann gibt es $c\in\mathbb{R}$, so daß $f(A) \subset [-c;c]$. $V := f^{-1}(]-c-1;c+1[)$ ist dann eine Umgebung von A; also gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $V \supset U_n$. Da T ein $\tau\alpha$-Raum ist nach Voraussetzung, folgt aus III.2.4. die Behauptung. %

IV.1.2. Definition. (ARCHANGEL'SKIĬ)
Sei R ein separierter topologischer Raum.
(a) $\mathbb{K}_1(R) := \{K \subset R \mid K$ kompakt und K besitzt eine abzählbare Basis seiner Umgebungen in $R\}$.
(b) R heißt von punktweise abzählbarem Typ $:\Leftrightarrow R = \cup\mathbb{K}_1(R)$.

IV.1.3. Bemerkung. Räume von punktweise abzählbarem Typ wurden erstmals von ARCHANGEL'SKIĬ in [Ar$_2$] im Zusammenhang mit k-Räumen definiert. Die Bedeutung der Räume von punktweise abzählbarem Typ im Zusammenhang mit $\tau\alpha$-Räumen liegt in der folgenden einfachen Feststellung:

IV.1.4. Satz. Sei T ein μ-Raum von punktweise abzählbarem Typ. Dann gilt: T $\tau\alpha$-Raum $\Rightarrow$ T lokalkompakt.

Beweis: Sei $t \in T$. Wähle $K \in \mathfrak{K}_1(T)$ mit $t \in K$. Nach IV.1.1. gibt es eine topologisch beschränkte Umgebung U von K. Da T μ-Raum ist, ist U relativ kompakt. Also ist U eine relativ kompakte Umgebung von t. %

IV.1.5. Folgerung. Sei T ein parakompakter Raum von punktweise abzählbarem Typ. Dann sind äquivalent:

(a) $C_c(T)$ pseudovollständig im Sinne von Oxtoby.

(b) $C_c(T)$ α-Raum.

(c) T $\tau\alpha$-Raum.

(d) T lokalkompakt.

Beweis: (a)$\Rightarrow$(b) ist klar. (b)$\Rightarrow$(c) ergibt sich aus Satz III.3.2.. (c)$\Rightarrow$(d) ergibt sich aus IV.1.4., wenn man noch beachtet, daß nach II.3.18. jeder parakompakte Raum μ-Raum ist. (d)$\Rightarrow$(a) haben wir schon in II.6.2. bewiesen. %

IV.1.6. Beispiele (vollständig regulärer Räume von punktweise abzählbarem Typ).

(a) Wie sofort zu sehen ist, ist jeder Raum T, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ein Raum von punktweise abzählbarem Typ. Insbesondre ist jeder metrisierbare Raum ein parakompakter Raum von punktweise abzählbarem Typ.

(b) Jeder Čech-vollständige Raum T ist ein Raum von punktweise abzählbarem Typ nach [Ar_2:Def.3.7.;Th.3.8.]. Dabei heißt T Čech-vollständig, wenn T eine G_δ-Menge in βT ist. Einen Überblick über Čech-vollständige Räume findet man z.B. in [E:Sect.3.9.].

(c) Weitere Beispiele von topologischen Räumen, die von punktweise abzählbarem Typ sind, sind die sog. p-Räume, die ebenfalls von ARCHANGEL'SKIĬ eingeführt wurden (zur Definition eines p-Raums vgl. [Ar_1:Def.1.4.] oder [Wk:Seite 137]). Daß jeder vollständig reguläre p-Raum ein Raum von punktweise abzählbarem Typ ist, ersieht man aus [Wk:Lemma 1] oder dem unten zitierten Satz von WICKE. ARCHANGEL'SKIĬ bewies auch den folgenden Satz (vgl. [Ar_1:Th.5.1.]):

> Sei R ein separierter topologischer Raum. Dann ist R ein parakompakter p-Raum genau dann, wenn es einen metrischen Raum M und eine eigentliche (perfekte) Abbildung von R auf M gibt.

Die parakompakten p-Räume sind damit genau die parakompakten M-Räume im Sinne von MORITA, die in [M] definiert werden (siehe dort insbes. Theorem 1.1.). Schließlich sei noch folgende Charakterisierung der separierten, topologischen Räume angegeben, die von punktweise abzählbarem Typ sind. Sie stammt von WICKE und ein Beweis findet sich in [Wk:Th.2.]:

> Sei R ein separierter topologischer Raum. Dann ist R von punktweise abzählbarem Typ genau dann, wenn R stetiges offenes Bild eines parakompakten p-Raums ist.

IV.1.7. Bemerkung. Für eine Charakterisierung der Pseudovollständigkeit im Sinne von Oxtoby in der Klasse $C_s(T)$ siehe man Kapitel VI, insbesondre Satz VI.1.3..

IV.1.8. Beispiel. Sei M ein metrisierbarer Raum.

Dann gilt: $C_c(M)$ ist tonneliert (II.3.18.; II.5.8.(a))

vollständig (II.5.5.,6.; II.4.12.(a)),

α_1'-, α_b'-Raum (II.4.7.(c); III.3.4.).

Ist M zusätzlich separabel, so gilt weiter:

$C_c(M)$ ist ultabornologisch (II.5.8.(b)),

separabel (II.5.7.),

submetrisierbar (II.5.3.).

Die Frage, ob $C_c(M)$ α-, α'-, Baire'scher Raum oder pseudovollständig ist, ist nach IV.1.5. und IV.1.6.(a) äquivalent mit: M ist lokalkompakt.

IV.1.9. Bemerkungen.

(a) IV.1.8. erläutert auch das in der Einleitung angegebene Beispiel in [Wi:p.333;table 1], das besagt, daß $C_c(\mathbb{Q})$ ($\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen) kein Baire'scher Raum ist; denn $\mathbb{Q}$ ist nicht lokalkompakt.

(b) $C^b(\mathbb{Q})$ ist ein dichter Teilraum von $C_c(\mathbb{Q})$ nach II.4.6.(c), der wegen II.4.7.(a) ein α'-Raum ist. Also ist $C_c^b(\mathbb{Q})$ wegen IV.1.8. das in I.2.5.(b) angekündigte Beispiel eines α'-Raumes, dessen Vervollständigung kein α-Raum ist. Ein anderes Beispiel dieser Art ist der Teilraum $R_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}(C(\mathbb{R}))$ von $C_c(\mathbb{Q})$ (vgl. II.4.13.(a),(b) und I.2.9.(b)).

(c) In V.3.1. werden wir noch ein spezielles Beispiel eines separablen, metrisierbaren Raumes angeben, der nicht lokalkompakt ist. Diesem Raum wird dann in V.3.4. eine besondere Bedeutung zukommen.

IV.2. Reellkompakte $\tau\alpha$-Räume

IV.2.1. Bemerkung. T ist lokalkompakt genau dann, wenn $\beta T \setminus T$ kompakt ist. Dies folgt aus [B:Ch.I,§9.7,prop.12;13] und der Tatsache, daß T dicht ist in βT.

IV.2.2. Satz. Man betrachte die folgenden Aussagen:

(a) νT lokalkompakt.

(b) $\beta T \setminus \nu T$ abzählbar kompakt.

(c) νT $\tau\alpha$-Raum.

(d) T $\tau\alpha$-Raum.

Dann gilt: (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d).

Beweis: (a)$\Rightarrow$(b) folgt aus IV.2.1., wenn man noch $\beta(\nu T) = \beta T$ beachtet, was sich aus II.3.7., insbesondre der dortigen Eindeutigkeitsaussage, ergibt.

(b)$\Rightarrow$(c): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Teilmengen von νT, die (2) aus III.2.2. erfüllt. Da $(\overline{A_n}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \nu T))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen in $\beta T \setminus \nu T$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft ist, ist nach Voraussetzung $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\overline{A_n}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \nu T)) \neq \emptyset$. Also folgt (c) mit III.2.2..

(c)$\Rightarrow$(d) ist klar, da T C-eingebettet in νT ist.

%

IV.2.3. Bemerkungen.

(a) Sei T gegeben. Ist νT ein $\tau\alpha$-Raum, so folgt mit III.3.2.: $C_c(\nu T)$ ist α-Raum. Nach [Sch:III.2.3.;II.9.2.] ist $C_c(\nu T)$ der zu $C_c(T)$ und zu $C_s(T)$ assoziierte ultrabornologische Raum. (Siehe [Sch:I.1.;I.3.] zur Definition des assoziierten ultabornologischen Raumes.)

(b) Sei T ein reellkompakter Raum von punktweise abzählbarem Typ. Dann sind äquivalent:

(1) T lokalkompakt

(2) $\beta T \setminus T$ abzählbar kompakt

(3) $\beta T \setminus T$ pseudokompakt

(4) T $\tau\alpha$-Raum.

Beweis: Da $\nu T = T$, folgt "(1)$\Rightarrow$(2)" aus IV.2.2.. Mit derselben Begründung gilt: (2)$\Rightarrow$(4). (4)$\Rightarrow$(1) ergibt sich aus IV.1.4., wenn man sich an II.3.18. erinnert. (2)$\Rightarrow$(3) ist trivial, und (3)$\Rightarrow$(1) ist nach IV.2.1. und II.3.17. bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß $\beta T \setminus T$ reellkompakt ist. Das folgt jedoch sofort aus:

(c) Ist T ein Raum von punktweise abzählbarem Typ, so ist $\beta T \setminus T$ reellkompakt.

Beweis: Nach [We:Th.8.7.] ist nur zu zeigen: Zu $t \in T$ gibt es eine G_δ-Menge G in βT mit $t \in G$ und $G \cap (\beta T \setminus T) = \emptyset$. Sei also $t \in T$. Wähle $K \in \mathbb{K}_1(T)$ mit $t \in K$. Dann ist $G := K$ geeignet, denn $K \in \mathbb{K}_1(\beta T)$, wie man sich ohne Mühe klarmacht.

(d) Wie wir in IV.4.11.(b) sehen werden, folgt aus $\beta T \setminus \nu T$ abzählbar kompakt nicht immer $\beta T \setminus \nu T$ kompakt .

(e) Im allgemeinen folgt aus " T lokalkompakt" nicht "νT lokalkompakt". Ein Gegenbeispiel findet man z.B. in [C:Sect.5.]. Ebenfalls in [C] ist eine Charakterisierung der lokalen Kompaktheit von νT angegeben ([C:Th.4.6]).

IV.2.4. Frage 2.

(a) Gilt in IV.2.2. eine zusätzliche Implikation?

(b) Ist die Aussage "T $\tau\alpha$-Raum" notwendig oder hinreichend für die Aussage " $\beta T \setminus \nu T$ pseudokompakt" ?

IV.3. Beispiele von $\tau\alpha$-Räumen, die keine $\tau\alpha'$-Räume sind

IV.3.1. Bemerkung. Sei R ein separierter topologischer Raum, und alle Punkte von R bis auf genau einen seien offen. Dann ist R vollständig regulär. Denn sei $r_o \in R$ derjenige Punkt von R, der nicht offen ist. Sei $r \in R$ beliebig und $A \subset R$ abgeschlossen mit $r \notin A$. Für $B \subset R$ bezeichne χ_B wie üblich die Indikatorfunktion der Menge B. Ist $r \neq r_o$, so ist $\chi_{\{r\}}$ geeignet. Ist $r = r_o$, so ist $\chi_A \in C(R)$ geeignet, womit R als vollständig regulär erkannt ist.

IV.3.2. Definition. Sei (S,τ) folgendermaßen definiert: $S := \mathbb{N}^2 \cup \{x\}$, wobei $x \notin \mathbb{N}^2$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$. ($S_n$ heißt auch die n-te Zeile von $\mathbb{N}^2$.)
Für $s \in S$ definiert man:

$$\mathfrak{B}(s) := \begin{cases} \{\{s\}\} & \text{, falls } s \neq x \\ \{U \subset S \mid x \in U;\ \mathrm{card}(\{n \mid \mathrm{card}((S \setminus U) \cap S_n) = \infty\}) < \infty\}, & \text{falls } s = x. \end{cases}$$

Wie sofort zu sehen ist, gilt: $U, V \in \mathfrak{B}(s) \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{B}(s)$. Also gibt es nach einem bekannten Satz (vgl. [B:Ch.I,§1.2, prop.2]) genau eine Topologie τ auf S derart, daß $\mathfrak{B}(s)$ für $s \in S$ eine Umgebungsbasis von s bzgl. τ ist.

IV.3.3. Bemerkungen.

(a) Die Definition von (S,τ) stammt von ARENS (vgl. z.B. [K:Ch.2,probl.E]).

(b) Umgebungen des Punktes $x \in S$ (bzgl. τ) sind also alle Teilmengen von S, die x und fast alle Elemente fast aller Zeilen enthalten.

IV.3.4. Eigenschaften von $S:=(S,\tau)$.

(a) S ist vollständig regulär nach IV.3.1., da S offensichtlich separiert ist.

(b) S ist Lindelöf, da S abzählbar ist. Insbesondre ist S reellkompakt nach II.3.18..

(c) $S_n \in \mathbb{N}(S)$ für alle $n\in\mathbb{N}$, wie unmittelbar klar ist.

(d) Jede kompakte Teilmenge von S ist endlich. Insbesondre ist S hemikompakt. Denn sei $K\subset S$ kompakt. Dann ist $\mathrm{card}(K\cap S_n)<\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$ nach (c). Überdies ist $\mathrm{card}(\{n\mid K\cap S_n\neq\emptyset\})<\infty$, weil sonst K eine unendliche, diskrete, abgeschlossene Teilmenge nach Definition von $\mathcal{B}(x)$ enthielte.

(e) S ist $\tau\alpha$-Raum. Dies kann man ohne Schwierigkeiten direkt nachweisen. Ein andrer Beweis ergibt sich aus IV.3.5.(c).

(f) S ist kein $\tau\alpha'$-Raum. Denn zu $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es kein $f\in C(S)$, das auf allen S_n unbeschränkt ist. Ein solches f wäre nämlich auf allen $U\in\mathcal{B}(x)$ unbeschränkt, was der Stetigkeit von f widerspräche. Vgl. auch III.2.4.(d).

IV.3.5. Eigenschaften von $C_c(S)$.

(a) $C_c(S)=C_s(S)$ nach IV.3.4.(d). Da S abzählbar ist, läßt sich $C_s(S)$ auffassen als dichter Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nach II.4.4.(b). $C_c(S)$ ist also separabel und metrisierbar (was sich auch aus den Sätzen in II.5. ergibt).

(b) $C_c(S)$ ist ultrabornologisch nach IV.3.4.(b) und II.5.8.(b).

(c) $C_c(S)$ ist α-Raum nach (a),(b) und I.2.7.(b). Damit ist mit Satz III.3.2. S als $\tau\alpha$-Raum erkannt.

(d) $C_c(S)$ ist kein α'-Raum wegen IV.3.4.(f) und III.3.1.. Insbesondre ist $C_c(S)$ nicht vollständig nach dem Satz von Baire (vgl. I.1.4.).

(e) $C_c(S)$ ist das in I.2.7.(a) angekündigte Beispiel eines tonnelierten Raumes, dessen Vervollständigung ein Baire'scher Raum ist, der aber kein α'-Raum ist.

IV.3.6. Bemerkung. Nach IV.3.4.(d) ist S nicht lokalkompakt. Das zeigt, daß in IV.1.5. und IV.2.3.(b) die Voraussetzung wesentlich ist, daß T ein Raum von punktweise abzählbarem Typ ist.

IV.3.7. Definition. (vgl. [B:Ch.IX,exc.5.15.])

(a) $B := \left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid s=0 \text{ oder es gibt } k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N} \text{ mit } (s,t)=(\frac{1}{n+1}, \frac{k}{(n+1)^2})\right\}$.

$D := \left\{b\in B \mid \text{Es gibt } r\in\mathbb{R} \text{ mit } b=(0,r)\right\}$.

Für $b=(0,r)\in D$ und $n\in\mathbb{N}$ sei

$T_n(b) := \left\{(s,t)\in B \mid s\leq \frac{1}{n+1} \text{ und } |r-t|\leq s\right\}$.

(b) Definiere für $b\in B$:

$$\mathfrak{B}(b) := \begin{cases} \{\{b\}\} & \text{,falls } b\in B\setminus D \\ \{T_n(b) \mid n\in\mathbb{N}\} & \text{,falls } b\in D. \end{cases}$$

(c) Wie in IV.3.2. sieht man sehr leicht ein, daß es genau eine Topologie τ auf B gibt, so daß $\mathfrak{B}(b)$ für $b\in B$ eine Umgebungsbasis bzgl. τ ist.

(d) Sei ε die von der üblichen Euklidischen Topologie von $\mathbb{R}^2$ auf B induzierte Topologie.

IV.3.8. Eigenschaften von $B:=(B,\tau)$.

(a) Wie unmittelbar der Definition zu entnehmen ist, ist B ein lokalkompakter, also insbesondre vollständig re-

gulärer topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Weiter ist D ein diskreter, abgeschlossener Teilraum von B. Schließlich ist ε gröber als τ.

(b) Jeder Teilraum von B ist reellkompakt.

Dies ist eine einfache Anwendung der folgenden Aussage, die in [GJ:8.18.] bewiesen wird:

> Sei σ: X $\longrightarrow$ Y injektiv und stetig (X,Y vollständig regulär). Ist jeder Teilraum von Y reellkompakt, so ist jeder Teilraum von X reellkompakt.

Man setze $\sigma := id_B$; X:=(B,τ); Y:=(B,ε) und beachte, daß, da jeder Teilraum von (B,ε) eine abzählbare Basis besitzt, jeder Teilraum von (B,ε) Lindelöf, also reellkompakt ist.

(c) B ist nicht normal.

Annahme: B ist normal. Wegen (a) besitzt dann jede reellwertige Funktion auf D eine stetige Fortsetzung auf B. Da $\mathrm{card}(D)=\mathrm{card}(\mathbb{R})$, folgt: $\mathrm{card}(C(B)) \geq \mathrm{card}(\mathbb{R})^{\mathrm{card}(\mathbb{R})} = 2^{\mathrm{card}(\mathbb{R})}$. Andrerseits ist B separabel (B\D ist dicht in B.). Also gilt: $\mathrm{card}(C(B)) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R})^{\mathrm{card}(\mathbb{N})} = \mathrm{card}(\mathbb{R})$. Das ist aber ein Widerspruch, da $\mathrm{card}(\mathbb{R}) < 2^{\mathrm{card}(\mathbb{R})}$.

(d) B ist ein $\tau\alpha$-Raum. Das folgt aus (a), (b) und IV.2.2. (vgl. auch IV.2.3.(b)).

(e) B ist kein $\tau\alpha'$-Raum.

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir:

$$A_{m,n} := \left\{(0,t) \in D \mid \frac{n}{m+1} < t < \frac{n+1}{m+1}\right\} .$$

Dann ist jedes $A_{m,n}$ τ-abgeschlossen und nicht τ-relativ kompakt, also nicht topologisch beschränkt bzgl. B, da B μ-Raum ist nach (b). Es genügt nun zu zeigen:

(1) Zu jedem $f\in C(B)$ gibt es $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}$, so daß f auf $A_{m,n}$ beschränkt ist.

Sei also $f\in C(B)$. Man definiert für $i,j\in\mathbb{N}$:

$F_{i,j} := \{d\in D \mid |f(b)| \leq i \text{ für alle } b\in T_j(d)\}$. Weil f stetig und weil $(T_n(d))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis für jedes $d\in D$ ist, folgt:

(2) $D = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} F_{i,j}$.

Aus der Definition der $F_{i,j}$ folgt weiter:

(3) Für jedes $i\in\mathbb{N}$ ist $(F_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

D ist von zweiter Baire'scher Kategorie in $(D, \varepsilon|_D)$, da $(D, \varepsilon|_D)$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Weil $\{A_{m,n} \mid m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}\}$ eine Basis von $\varepsilon|_D$ ist, folgt aus (2):

(4) Es gibt $i_o, j_o, m_o\in\mathbb{N}$, $n_o\in\mathbb{Z}$ derart, daß F_{i_o,j_o} dicht ist in A_{m_o,n_o} bezüglich $\varepsilon|_D$.

(1) folgt nun aus:

(5) $\sup\{|f(b)| \mid b\in A_{m_o,n_o}\} \leq i_o$.

Bew. von (5): Annahme: Es gibt $d=(0,t)\in A_{m_o,n_o}$, so daß $|f(d)| > i_o$. Da f stetig ist, gibt es ein $k\in\mathbb{N}$, so daß für alle $b\in T_k(d)$ gilt: $|f(b)| > i_o$. Wegen (3) kann nun $k=j_o$ angenommen werden (sonst Übergang zu $\max\{j_o,k\}$, und $F_{i_o,\max\{j_o,k\}}$ ist immer noch dicht in A_{m_o,n_o} bezüglich $\varepsilon|_D$). Wegen (4) gibt es dann $d'=(0,t')\in F_{i_o,j_o}$ derart, daß $|t-t'| < \frac{1}{j_o+1}$. $\Rightarrow$ Es gibt ein $l\in\mathbb{Z}$, so daß $b_o := (\frac{1}{j_o+1}, \frac{l}{(j_o+1)^2}) \in T_{j_o}(d) \cap T_{j_o}(d')$. Dies ergibt nun den gewünschten Widerspruch, denn $|f(b_o)| > i_o$ wegen oben, und andrerseits ist $|f(b_o)| \leq i_o$, da $d'\in F_{i_o,j_o}$.

%

IV.3.9. Eigenschaften von $C_c(B)$.

(a) $C_c(B)$ ist ein ultrabornologischer (IV.3.8.(b);II.5.8.(b)), separabler (IV.3.8.(a);II.5.7.), submetrisierbarer (II.5.3.) α-Raum (IV.3.8.(d);III.3.2.).

(b) $C_c(B)$ ist vollständig nach IV.3.8.(a); II.5.5.,II.5.6.(a) und II.4.12.(a).

(c) $C_c(B)$ ist kein α'-Raum nach IV.3.8.(e) und III.3.1.. Schließlich ist $C_c(B)$ nicht B-vollständig wegen IV.3.8.(c) und II.4.14.(a).

IV.3.10. Frage 3. Ist $C_c(B)$ B_r-vollständig im Sinne von [H:Ch.3,§17,exc.5.] ?

IV.3.11. Bemerkung. Das Beispiel B zeigt, daß in II.6.2. und IV.1.5. die Voraussetzung "T parakompakt" nicht durch "T reellkompakt" ersetzt werden darf. Weiter zeigt das Beispiel B, daß IV.2.2.(d) und IV.2.3.(b);(4) nicht zu "T $\tau\alpha'$-Raum" verschärft werden können.

IV.4. Beispiele von α'-Räumen, die keine Baire'schen Räume sind

IV.4.1. Bemerkung. Ist T pseudokompakt, aber nicht kompakt (II.3.18.(8),(9)), so ist $C_c(T)$ ein α'-Raum (II.4.7.(b)), der nicht tonneliert ist (II.3.17.(b);II.5.8.(a)). Daß T ein $\tau\alpha'$-Raum ist, ergibt sich auch aus III.2.4.(c) und II.3.17.. Ein Beispiel eines tonnelierten α'-Raumes, der kein Baire'scher Raum ist, findet man in [Sa_2:Ex.2.2.]. Wir geben im folgenden ein solches Beispiel in der Klasse $C_c(T)$ an. Siehe dazu insbesondre IV.4.6. und IV.4.10..

IV.4.2. Definition.

(a) Sei $x \notin \mathbb{N}$. Dann $E := \mathbb{N} \cup \{x\}$.

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein freier Filter auf $\mathbb{N}$ (d.h. $\cap \mathcal{F} = \emptyset$).

Für $e \in E$ definiert man:

$$\mathcal{B}(e) := \begin{cases} \{\{e\}\} & , \text{ falls } e \neq x; \\ \{\{x\} \cup F \mid F \in \mathcal{F}\} & , \text{ falls } e = x. \end{cases}$$

(c) Sei $\tau_{\mathcal{F}}$ die eindeutig bestimmte, separierte Topologie auf E derart, daß $\mathcal{B}(e)$ für $e \in E$ eine Umgebungsbasis von e bzgl. $\tau_{\mathcal{F}}$ ist. Dann definiert man: $E_{\mathcal{F}} := (E, \tau_{\mathcal{F}})$.

IV.4.3. Bemerkung. $E_{\mathcal{F}}$ ist stets vollständig regulär nach IV.3.1. und Lindelöf, da E abzählbar ist. Insbesondre ist $E_{\mathcal{F}}$ reellkompakt.

IV.4.4. Definition. (Vgl. z.B. [GJ:Exc.6U.] .)

(a) Für $F \subset \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $N(n,F) := \text{card}(\{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\} \cap F)$.

(b) Für $F \subset \mathbb{N}$ sei $\underline{D}(F) := \lim_n \inf \frac{N(n,F)}{n+1}$; $\overline{D}(F) := \lim_n \sup \frac{N(n,F)}{n+1}$.

(c) $\mathcal{D} := \{F \subset \mathbb{N} \mid \underline{D}(F) = 1\}$.

IV.4.5. Bemerkungen.

(a) $\mathcal{D}$ ist ein freier Filter auf $\mathbb{N}$.

Wir zeigen nur: $F_i \in \mathcal{D}$ für $i=1,2 \Rightarrow F := F_1 \cap F_2 \in \mathcal{D}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq k$ $\frac{N(n,F_i)}{n+1} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ für $i=1,2$. Dann folgt für $n \geq k$:

$\frac{N(n,F)}{n+1} \geq \frac{N(n,F_1)}{n+1} - \frac{N(n,\mathbb{N} \setminus F_2)}{n+1} = \frac{N(n,F_1)}{n+1} + \frac{N(n,F_2)}{n+1} - 1 \geq$

$= 1 - \varepsilon$.

(b) Nach (a) ist $E_{\mathcal{D}}$ definiert und wegen II.2.4.(b),(d) gilt für $A \subset \mathbb{N}$ mit $\text{card}(A) = \infty$:

$$A \in \mathbb{N}(E_{\mathcal{D}}) \Leftrightarrow \overline{D}(A) = 0.$$

IV.4.6. Weitere Eigenschaften von $E_{\mathfrak{D}}$.

(a) Jede kompakte Teilmenge von $E_{\mathfrak{D}}$ ist endlich; insbesondre ist $E_{\mathfrak{D}}$ hemikompakt.

Nach IV.4.5.(b) genügt es zu zeigen: Ist $A \subset \mathbb{N} \subset E_{\mathfrak{D}}$ mit $\text{card}(A) = \infty$, so gibt es $B \subset A$ mit $\text{card}(B) = \infty$ und $\overline{D}(B) = 0$. Ist aber A eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N} \subset E_{\mathfrak{D}}$, so wähle man induktiv eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ und $a_n \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $B := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ leistet dann das Gewünschte.

(b) $E_{\mathfrak{D}}$ ist $\tau\alpha'$-Raum.

Sei $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen von $E_{\mathfrak{D}}$ mit $N_n \in \mathbb{N}(E_{\mathfrak{D}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach III.2.4.(d) ist zu zeigen: Es gibt $N \in \mathbb{N}(E_{\mathfrak{D}})$ mit $\text{card}(N \cap N_n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei d wie in III.1.7. definiert. Wir wählen induktiv eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch:

$$y_0 := \min (N_0 \cap \mathbb{N});$$

$$y_{d(m,n)} := \min (N_n \cap \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq 2^{d(m,n)}\}).$$

Wieder wegen IV.4.5.(b) ist $N := \{y_{d(m,n)} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ geeignet.

IV.4.7. Definition.

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von T. $\mathcal{A}$ besitzt die Eigenschaft (KT): $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \neq \emptyset$, und zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset T$ gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \cap K = \emptyset$.

(b) T ist ein β-Raum: $\Leftrightarrow$ Zu jeder Folge $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei jedes $\mathcal{K}_n$ eine Menge kompakter Teilmengen von T mit der Eigenschaft (KT) ist, gibt es eine lokalendliche Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, offener Teilmengen von T, so daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $K_n \in \mathcal{K}_n$ gibt mit $K_n \subset V_n$.

IV.4.8. Lemma. (Vgl. auch [LMC:Th.4.6] .)

Ist $C_c(T)$ ein Baire'scher Raum, so ist T ein β-Raum.

Beweis: Für $r\in\mathbb{R}$ sei $const(r):T\longrightarrow\mathbb{R};\ t\longmapsto r$. Definiere für $n\in\mathbb{N}$ und $K\subset T$ kompakt: $O(n,K):=\{f\in C(T)\mid P_K(f-const(n))<\frac{1}{2}\}$. Dann ist jedes $O(n,K)$ offen in $C_c(T)$. Sei für $n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{K}_n$ eine Menge kompakter Teilmengen von T mit der Eigenschaft (KT). Definiere für $n\in\mathbb{N}$: $U_n:=\bigcup_{K\in\mathcal{K}_n} O(n,K)$.

(1) Beh.: Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist U_n offen und dicht in $C_c(T)$.

Bew. von (1): Daß jedes U_n offen ist, ist klar. Seien $n\in\mathbb{N}$, $g\in C(T)$, $\emptyset\neq K\subset T$ kompakt und $\varepsilon>0$ gegeben. O.B.d.A. sei $\emptyset\notin\mathcal{K}_n$. Nach Voraussetzung gibt es $K'\in\mathcal{K}_n$ mit $K\cap K'=\emptyset$. Nach II.1.8. gibt es $h,h'\in C(T)$ derart, daß gilt: $h|_K=0$, $h|_{K'}=1$; $h'|_K=1$, $h'|_{K'}=0$. Dann gilt für $f:=const(n)h+gh'$: $f|_K=g|_K$ und $f|_{K'}=const(n)|_{K'}$. $\Rightarrow$ (1).

Da $C_c(T)$ ein Baire'scher Raum ist nach Voraussetzung, gibt es $f_o\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Definiert man für $n\in\mathbb{N}$ $V_n:=f_o^{-1}(]n-\frac{1}{2};n+\frac{1}{2}[)$, so leistet $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Gewünschte. %

IV.4.9. Bemerkungen.

(a) Ist T β-Raum, so ist T ein μ-Raum.

Denn sei A eine nicht relativ kompakte Teilmenge von T. Für $n\in\mathbb{N}$ definieren wir $\mathcal{K}_n:=\{\{a\}\mid a\in A\}$. Nach Voraussetzung besitzt jedes $\mathcal{K}_n$ die Eigenschaft (KT). Da T β-Raum ist, folgt die Behauptung aus II.2.4.(b) und II.2.5..

(b) Jeder β-Raum T ist ein $\tau\alpha'$-Raum.

Denn sei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $N_n\in\mathbb{N}(T)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Man zerlege jedes N_n in unendlich viele paarweise disjunkte, unendliche Mengen $M_{n,m}$

$(m\in\mathbb{N})$ und definiert für $m,n\in\mathbb{N}$: $\mathcal{K}_{n,m} := \{\{x\} \mid x\in M_{n,m}\}$. Jedes $\mathcal{K}_{n,m}$ besitzt die Eigenschaft (KT). Da T β-Raum nach Voraussetzung, folgt wieder mit II.2.4.(b): Es gibt $N\in\mathbb{N}(T)$ mit $\mathrm{card}(N\cap N_n)=\infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow$ Beh. nach III.2.4.(d).

(c) $E_{\mathfrak{D}}$ ist kein β-Raum.

Für $i\in\mathbb{N}$ sei $F_i := \{j\in E_{\mathfrak{D}} \mid 2^i \le j < 2^{i+1}\}$. Für $n\in N$ sei $\mathcal{K}_n :=$ $= \{F_i \mid i\ge n\}$. Dann ist $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen kompakter Teilmengen von $E_{\mathfrak{D}}$ und jedes $\mathcal{K}_n$ besitzt wegen IV.4.6.(a) die Eigenschaft (KT). Sei nun $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine strikt zunehmende Teilfolge natürlicher Zahlen. Dann ist die Folge $(F_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ nicht lokalendlich wegen $\overline{D}(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_{n_j}) \ge \frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ Behauptung.

IV.4.10. Eigenschaften von $C_c(E_{\mathfrak{D}})$.

Wie in IV.3.5. sieht man: $C_c(E_{\mathfrak{D}}) = C_s(E_{\mathfrak{D}})$ läßt sich auffassen als dichter Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, und $C_c(E_{\mathfrak{D}})$ ist ein ultrabornologischer α'-Raum. Wegen IV.4.8. und IV.4.9.(c) ist $C_c(E_{\mathfrak{D}})$ kein Baire'scher Raum.

IV.4.11. Weitere Bemerkungen.

In diesem Abschnitt bezeichne $\mathfrak{U}$ einen freien Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Sei $E_{\mathfrak{U}}$ wie in IV.4.2. definiert. Dann gilt:

(a) Jede kompakte Teilmenge von $E_{\mathfrak{U}}$ ist endlich.

Denn sei $A\subset\mathbb{N}\subset E_{\mathfrak{U}}$ mit $\mathrm{card}(A)=\infty$ gegeben. Wir wählen disjunkte Teilmengen V_1, V_2 in $\mathbb{N}$ mit $V_1\cup V_2=\mathbb{N}$ und $\mathrm{card}(A\cap V_i)=$ $=\infty$ für $i=1,2$. Da $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt: $V_1\in\mathfrak{U}$ oder $V_2\in\mathfrak{U}$. O.B.d.A. sei $V_1\in\mathfrak{U}$. Dann ist $V_2\cap A$ ein unendlicher, diskreter, abgeschlossener Teilraum von $E_{\mathfrak{U}}$. $\Rightarrow$ Beh..

(b) $E_{\mathcal{U}}$ ist nicht lokalkompakt, aber $\beta E_{\mathcal{U}} \setminus E_{\mathcal{U}}$ ist abzählbar kompakt. (Damit ist $E_{\mathcal{U}}$ auch als Beispiel für die Aussage in IV.2.3.(d) geeignet.)

Nach (a) ist $E_{\mathcal{U}}$ nicht lokalkompakt. Nach [GJ:Exc.6E.5.] kann man $E_{\mathcal{U}}$ auffassen als Teilraum von $\beta\mathbb{N}$ und zwar gilt: $E_{\mathcal{U}}$ ist homöomorph mit $\mathbb{N} \cup \{u\}$ $(u \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$, wobei u in eineindeutiger Weise dem freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ entspricht. (Man vergleiche hierzu die Konstruktion der Stone-Čech-Kompaktifizierung in [GJ:6.5].) Mit II.3.7. folgt nun: $\beta E_{\mathcal{U}} = \beta\mathbb{N}$ und $\upsilon E_{\mathcal{U}} = E_{\mathcal{U}}$. Wir zeigen nun: $\beta\mathbb{N} \setminus E_{\mathcal{U}}$ ist abzählbar kompakt (vgl. [Wi:Sec.14.1.Ex.2.]).

Annahme: $\beta\mathbb{N} \setminus E_{\mathcal{U}}$ ist nicht abzählbar kompakt. Dann gibt es eine abzählbar unendliche Teilmenge $D \subset \beta\mathbb{N} \setminus E_{\mathcal{U}}$ ohne Häufungspunkt in $\beta\mathbb{N} \setminus E_{\mathcal{U}}$. Da $\beta\mathbb{N}$ kompakt ist, besitzt D einen Häufungspunkt p in $\beta\mathbb{N}$. p ist eindeutig bestimmt, und es gilt: $p=u. \Rightarrow D \cup \{u\}$ ist eine abzählbar unendliche, kompakte Teilmenge von $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur folgenden Aussage, die in [GJ:Cor.9.12.] bewiesen ist:

> Ist X ein lokalkompakter, reellkompakter Raum und Y eine unendliche, abgeschlossene Teilmenge von $\beta X \setminus X$, so gilt: $\operatorname{card}(Y) \geq 2^{\operatorname{card}(\mathbb{R})}$.

(c) Die folgende interessante Aussage ist in [LMC:Ex.7.1] bewiesen: $C_c(E_{\mathcal{U}}) = C_s(E_{\mathcal{U}})$ (vgl (a)) ist ein Baire'scher Raum für jeden freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$.

IV.4.12. Frage 4. Für welche Klasse vollständig regulärer Räume T gilt folgende Äquivalenz (vgl. [LMC:Th.5.1;Th.6.3]):

$C_c(T)$ Baire'scher Raum $\Leftrightarrow$ T β-Raum ?

Kapitel V

Vererbbarkeitseigenschaften und eine Charakterisierung der $\tau\alpha$-Räume in der Klasse der μ-Räume

Vorbemerkung: In diesem Kapitel bezeichne S stets einen (weiteren) vollständig regulären Raum.

V.1. Fast abgeschlossene Teilräume, Summen und Produkte

V.1.1. Bemerkung. Sei T ein μ-Raum. Ist $S \subset T$ fast abgeschlossen, so gilt: S ist μ-Raum. Ist T zusätzlich ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum), so folgt: S ist ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum). Dies folgt entweder unmittelbar aus den Definitionen oder aus II.4.14.(b), II.5.8.(a), III.3.1. und III.3.2..

V.1.2. Bemerkung. Sei $(T_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\tau\alpha$-Räumen (bzw. von $\tau\alpha'$-Räumen). Dann ist die topologische Summe $T := \sum_{i\in I} T_i$ der T_i $(i\in I)$ ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum).
Bew. im Fall "$\tau\alpha'$": Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von T, die allesamt nicht topologisch beschränkt sind. O.B.d.A. kann $I=\mathbb{N}$ angenommen werden, also $T=\sum_{m\in\mathbb{N}} T_m$. Für $m,n\in\mathbb{N}$ sei $B_{m,n} := A_n \cap T_m$. Für $m\in\mathbb{N}$ sei $I_m := \{n\in\mathbb{N} \mid B_{m,n} \notin \mathfrak{B}(T_m)\}$. Sei $m\in\mathbb{N}$.
1. Fall: Ist $I_m=\emptyset$, so definiert man $f\in C(T_m)$ durch: $f_m := \text{const}(m)$.
2. Fall: Ist $I_m\neq\emptyset$, so gibt es nach Voraussetzung $f_m\in C(T_m)$, so daß für alle $n\in I_m$ f_m auf $B_{m,n}$ nicht beschränkt ist. O.B.d.A. kann in diesem Fall $|f_m| \geq m$ angenommen werden. Definiere $g\in C(T)$ durch: $g(t) := f_m(t)$, falls $t\in T_m$. Dann ist g auf allen A_n unbeschränkt, und die Beh. im Fall "$\tau\alpha'$" folgt.

Den Beweis im Falle "$\tau\alpha$" führt man entweder ähnlich oder man erinnert sich an I.2.8.(a), II.6.1. und III.3.2.. ⅋

V.1.3. Bemerkung. Sei K kompakt, und T sei ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum). Dann ist KxT ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum).

Bew. nur im Fall "$\tau\alpha'$": Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von KxT gegeben, so daß es zu jedem $f\in C(KxT)$ ein $n\in\mathbb{N}$ gibt, so daß f auf A_n beschränkt ist. Nach III.2.4.(b) ist zu zeigen: Es gibt $n_o\in\mathbb{N}$, so daß $A_{n_o}\in\mathfrak{B}(KxT)$. Sei pr_T die kanonische Projektion von KxT auf T. Dann ist $(pr_T(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge von Mengen, die die Eigenschaft (1) aus III.2.4.(b) besitzt. Nach Voraussetzung gibt es $n_o\in N$, so daß $pr_T(A_{n_o})\in\mathfrak{B}(T)$. Dann gilt aber: $A_{n_o}\subset K\times pr_T(A_{n_o})\in\mathfrak{B}(KxT)$. Denn sei $g\in C(KxT)$. Dann folgern wir aus [CN:5.1.]: $h(t):=\sup\{|g(k,t)|\,|\,k\in K\}$ $(t\in T)$ ist eine stetige, reellwertige Funktion auf T. Wegen oben ist dann $\sup\{h(t)\,|\,t\in pr_T(A_{n_o})\}<\infty$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. ⅋

V.1.4. Bemerkung. Wie man sich leicht überzeugt, gilt die folgende Aussage: Seien S,T μ-Räume und $\tau\alpha$-Räume. Dann ist SxT ein $\tau\alpha$-Raum (und ein μ-Raum).
Das Analogon dieser Aussage für abzählbare Produkte ist jedoch falsch, wie IV.2.3.(b) lehrt.

V.1.5. Definition. Sei $f: S \longrightarrow T$ eine Abbildung.
f heißt eigentlich (perfekt) : $\Leftrightarrow$ f ist stetig, abgeschlossen und faserkompakt (d.h. $f^{-1}(t)$ ist kompakt in S für alle $t\in T$).

V.1.6. Bemerkung. Eigentliche Abbildungen werden z.B. in [B:Ch.1.§10] , [CN:§9] und [E:3.7.] behandelt. Im weiteren werden wir nur noch die Bezeichnung "eigentlich" verwenden, weil auch BOURBAKI sie ausschließlich benutzt.

V.1.7. Folgerung. Sei $f: S \longrightarrow T$ eine eigentliche Abbildung, und T sei ein μ-Raum. Dann ist S ebenfalls ein μ-Raum. Ist T zusätzlich ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum), so ist auch S ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum).

Beweis: Das folgt aus II.3.15., V.1.1., V.1.3. und der folgenden Aussage, deren Beweis man in [E:3.7.26.] findet:

Sei $\mathcal{P}$ eine topologische Eigenschaft, die sich auf abgeschlossene Teilräume und Produkte mit einem kompakten Faktor vererbt. Ist $f: S \longrightarrow T$ eine eigentliche Abbildung und besitzt T die Eigenschaft $\mathcal{P}$, so besitzt S die Eigenschaft $\mathcal{P}$.

V.2. Hyperreelle Abbildungen

V.2.1. Bemerkung. Sei $f: S \longrightarrow T$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt f eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung $f^{\beta}: \beta S \longrightarrow \beta T$ (II.3.7.).

V.2.2. Definition. Sei $f: S \longrightarrow T$ eine stetige Abbildung. Dann heißt f hyperreell $:\Leftrightarrow$ Für $f^{\beta}: \beta S \longrightarrow \beta T$ gilt:

$$f^{\beta}(\beta S \setminus \nu S) \subset \beta T \setminus \nu T.$$

V.2.3. Bemerkung. Diese Definition stammt von BLAIR und findet sich in [We:17.16.] . Im allgemeinen ist das eigentliche Bild eines reellkompakten Raumes nicht wieder reellkompakt (vgl. [We:16.4.]). Demgegenüber ist das hyperreelle Bild eines reellkompakten Raumes reellkompakt, wie man direkt aus der Definition, II.3.7. und II.3.17.(a)

ersieht. Die Bedeutung der hyperreellen Abbildungen im Zusammenhang mit $\tau\alpha$- und $\tau\alpha'$-Räumen liegt in dem folgenden Lemma.

V.2.4. Lemma. Sei $f: S \longrightarrow T$ eine hyperreelle Abbildung.

(a) Ist T ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum), so ist S ein $\tau\alpha$-Raum (bzw. ein $\tau\alpha'$-Raum).

(b) Sei f zusätzlich surjektiv. Ist S ein $\tau\alpha$-Raum, so ist auch T ein $\tau\alpha$-Raum.

Beweis: (a): Wir führen den Beweis nur im Fall "$\tau\alpha'$" aus. Den Fall "$\tau\alpha$" beweist man analog. Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in S gegeben, so daß kein A_n topologisch beschränkt ist. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$: $\overline{A}_n^{\beta S} \cap (\beta S \setminus \nu S) \neq \emptyset$ (siehe II.3.13.(b)). Definiere für $n\in\mathbb{N}$: $B_n := f(A_n)$. Dann ist kein B_n topologisch beschränkt. Denn sei $x\in\overline{A}_n^{\beta S} \cap (\beta S \setminus \nu S)$. $\Rightarrow f^{\beta}(x) \in f^{\beta}(\overline{A}_n^{\beta S} \cap (\beta S \setminus \nu S)) \subset f^{\beta}(\overline{A}_n^{\beta S}) \cap f^{\beta}(\beta S \setminus \nu S) \subset \overline{f(A_n)}^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \nu T) = \overline{B}_n^{\beta T} \cap (\beta T \setminus \nu T)$; da f^{β} stetig und f hyperreell ist. Wiederum mit II.3.13.(b) folgt also, daß kein B_n topologisch beschränkt ist. Nach Voraussetzung gibt es $g\in C(T)$, das auf allen B_n ($n\in\mathbb{N}$) unbeschränkt ist. Dann ist aber $h := g\circ f \in C(S)$, und h ist auf allen A_n ($n\in\mathbb{N}$) unbeschränkt. $\Rightarrow$ Behauptung.

(b): Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Teilmengen von T gegeben, die (2) aus III.2.2.(c) erfüllt. Wir definieren für $n\in\mathbb{N}$: $B_n := f^{-1}(A_n)$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Mengen in S, und kein B_n ist topologisch beschränkt. Denn ist $g_n \in C(T)$ eine auf A_n unbeschränkte Funktion, so ist $h_n := g_n \circ f \in C(S)$ eine auf B_n unbeschränkte Funktion wegen der Surjektivität von f. Nach Voraussetzung und III.2.2. gibt es $x\in\beta S$ mit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n^{\beta S} \cap (\beta S \setminus \nu S)$. Da f hyper-

reell ist, folgt: $f^{\beta}(x) \in \beta T \setminus \upsilon T$. Weiter gilt: $f^{\beta}(x) \in f^{\beta}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n^{\beta S}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{\beta}(\overline{f^{-1}(A_n)}^{\beta S}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{\beta}((f^{\beta})^{-1}(\overline{A}_n^{\beta T})) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n^{\beta T}$, da ja f^{β} stetig ist. Aus III.2.2. folgt die Behauptung. %

V.2.5. Satz. Sei $f: S \longrightarrow T$ eine eigentliche, surjektive Abbildung. Dann:

(a) Ist T reellkompakt, so ist f hyperreell.

(b) Ist T perfekt normal (d.h. jede abgeschlossene Menge von T ist Nullstellenmenge von T), so ist f hyperreell.

Beweis: (a) folgt aus der Voraussetzung $T=\upsilon T$ und [CN:9.2.] : Eine stetige, surjektive Abbildung $g: S \longrightarrow T$ ist genau dann eigentlich, wenn $g^{\beta}(\beta S \setminus S) = \beta T \setminus T$.

(b) folgt aus der Voraussetzung und [We:17.19] : Eine stetige, faserkompakte Surjektion $g: S \longrightarrow T$ derart, daß für alle $Z \in \underline{Z}(S)$ $g(Z) \in \underline{Z}(T)$, ist hyperreell.

V.3. Eine Charakterisierung der $\tau\alpha$-Räume in der Klasse der μ-Räume

V.3.1. Definition. Sei (A,τ) folgendermaßen definiert: $A := \mathbb{N}^2 \cup \{x\}$, wobei $x \notin \mathbb{N}^2$. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $U_n := \bigcup_{k\geq n} S_k$, wobei $S_k := \{(m,k) \in \mathbb{N}^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ für $k\in\mathbb{N}$ (vgl. IV.3.2.).

Für $a\in A$ definiert man:

$$\mathfrak{B}(a) := \begin{cases} \{\{a\}\} & \text{, falls } a \neq x. \\ \{\{x\} \cup U_n \mid n\in\mathbb{N}\} & \text{, falls } a = x. \end{cases}$$

Sei τ die eindeutig bestimmte separierte Topologie auf A derart, daß $\mathfrak{B}(a)$ für $a\in A$ eine Umgebungsbasis von a bezüglich τ ist (siehe wiederum IV.3.2.).

V.3.2. Eigenschaften von $A:=(A,\tau)$ und $C_c(A)$.

(a) A ist vollständig regulär nach IV.3.1..

(b) A besitzt eine abzählbare Basis. Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß A abzählbar ist und jeder Punkt von A eine abzählbare Basis seiner Umgebungen besitzt.

(c) A ist vollständig metrisierbar.

Die Metrisierbarkeit von A folgt aus (a), (b) und einem bekannten Satz von URYSOHN (siehe z.B. [K:4.16.]). Um zu beweisen, daß A sogar vollständig metrisierbar ist, genügt es nach [CN:3.6.] zu zeigen, daß A eine G_δ-Menge in βA ist (vgl. IV.1.6.(b)). Dazu definiert man für $n\in\mathbb{N}$: $V_n := \overline{\{x\}\cup U_n}^{\beta A}$. Dann ist aber $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A\cup \overset{\circ}{V}{}_n^{\beta A})$ die gewünschte Darstellung von A als G_δ-Menge in βA.

(d) Für alle $n\in\mathbb{N}$ ist $S_n\in\mathbb{N}(A)$ (vgl. II.2.4.(b)). Insbesondre ist A nicht lokalkompakt.

(e) A ist kein $\tau\alpha$-Raum. Das ist klar wegen (c), (d) und IV.1.5..

(f) Für Eigenschaften von $C_c(A)$ siehe IV.1.8..

V.3.3. Definition. (vgl. [We:17.4.] oder [Wi:Sect.14.2.])
Eine Abbildung $f: S \longrightarrow T$ heißt minimal $:\Leftrightarrow$ Ist $F\subset S$ abgeschlossen und $F\neq S$, so ist $f(F)\neq f(S)$.

V.3.4. Satz. Sei T ein μ-Raum. Dann sind äquivalent:

(a) T ist $\tau\alpha$-Raum

(b) Es gibt keine eigentliche, surjektive Abbildung $f:S\longrightarrow A$ von einem fast abgeschlossenen Teilraum S von T auf A.

(c) Es gibt keine eigentliche, minimale, surjektive Abbildung $f: S \longrightarrow A$ von einem abgeschlossenen, C-eingebetteten Teilraum S von T auf A.

Beweis:

(a)=>(b): Es gebe eine eigentliche, surjektive Abbildung $f: S \longrightarrow A$ von einem fast abgeschlossenen Teilraum $S \subset T$ auf A. Da A nach V.3.2.(b) reellkompakt ist, ist f nach V.2.5.(a) hyperreell. (Man kann auch mit V.3.2.(c) und V.2.5.(b) schließen, denn jeder metrisierbare Raum ist bekanntlich perfekt normal.) Da A kein $\tau\alpha$-Raum ist nach V.3.2.(e), gilt wegen V.2.4.(b): S ist kein $\tau\alpha$-Raum. Weil T ein μ-Raum ist nach Voraussetzung, ist nach V.1.1. T kein $\tau\alpha$-Raum. Das war zu zeigen.

(b)=>(c) ist trivial.

(c)=>(a):

Sei T kein $\tau\alpha$-Raum. Wir konstruieren im folgenden S und f mit den in (c) geforderten Eigenschaften.

Da T kein $\tau\alpha$-Raum ist, gibt es wegen III.2.2.(d) eine Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen mit $N_n \in \mathcal{N}(T)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ derart, daß gilt:

(1) Ist $N\in\mathcal{N}(T)$, so ist $N\cap N_n \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $n\in\mathbb{N}$.

Wir definieren: $S := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n}^T$, $L := \{s\in S \mid s \text{ Limespunkt von } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\} :=$
$:= \{s\in S \mid (U\setminus\{s\})\cap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n)\neq\emptyset \text{ für jede Umgebung U von s bzgl. T}\}$.

(2) Beh.: $L\neq\emptyset$ und L ist relativ kompakt in T.

Bew. von (2): Annahme: $L=\emptyset$. Dann ist $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, und S ist ein diskreter, abgeschlossener Teilraum von T. Wir wählen für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $x_n\in N_n$. Dann ist $D:=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ein diskreter, abgeschlossener Teilraum von T mit $\text{card}(D)=\aleph_0$. Insbesondre ist D nicht kompakt. Da T μ-Raum ist, ist D nicht topologisch beschränkt bzgl. T.=> D enthält ein $N\in\mathcal{N}(T)$ nach II.2.5.. Das ist jedoch ein Widerspruch zu (1). Also ist $L\neq\emptyset$.

Annahme: L ist nicht relativ kompakt. Da T μ-Raum ist, ist L nicht topologisch beschränkt. Also gibt es ein $N \in \mathbb{N}(T)$ mit $N \subset L$. Sei $\{t_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von N. Nach II.2.4.(a) gibt es eine lokalendliche Folge $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter, offener Mengen $U_m \subset T$ mit $t_m \in U_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ N_n ein diskreter, abgeschlossener Teilraum von T ist (vgl. II.2.4.(c)), gilt nach Definition von L für jedes $m \in \mathbb{N}$: $U_m \cap N_n \neq \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $u_m \in U_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $\{u_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cap N_n \neq \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Da $\{u_m \mid m \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N}(T)$ nach II.2.4.(b), erhält man wieder einen Widerspruch zu (1). Damit ist (2) bewiesen.

Definiere: $K := \overline{L}^T$.

Es gilt: $\emptyset \neq K \subset S$ wegen (2). Weiter gilt: $\operatorname{card}(K \cap N_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ $N_n' := N_n \setminus K \in \mathbb{N}(T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $s \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n'$ gilt: s ist isolierter Punkt von S nach Definition von K. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\{t_n^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von N_n'.

Definiere $f: S \longrightarrow A$ durch:

$$f(s) := \begin{cases} x & , \text{ falls } s \in K. \\ \\ (m,n) \in \mathbb{N}^2, & \text{falls } s = t_n^m. \end{cases}$$

Damit ist f eine surjektive Abbildung von S auf A, so daß $f^{-1}(a)$ kompakt ist für alle $a \in A$. Weiters ist S σ-kompakt.

(3) Beh.: U ist eine Umgebung von K bzgl. S. $\Leftrightarrow$ $K \subset U$ und U enthält fast alle N_n'.

Bew. von (3): "$\Leftarrow$" ist klar, da jedes N_n' abgeschlossen in T ist.

"$\Rightarrow$": Wir nehmen an, es gibt eine Umgebung U von K bzgl S,

so daß U nicht fast alle N_n' enthält. Dann gibt es eine abgeschlossene, unendliche Teilmenge E von S mit $K \cap E = \emptyset$ derart, daß $E \cap N_n' \neq \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wie wir oben bemerkt haben, ist jeder Punkt von $S \setminus K$ ein isolierter Punkt von S. Da T μ-Raum ist, folgt (vgl. Bew. von (2)): Es gibt $N \in \mathfrak{N}(T)$ mit $N \cap N_n' \neq \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, was wiederum einen Widerspruch zu (1) ergibt. Damit ist (3) bewiesen. Die Stetigkeit von f folgt nun sofort aus (3)"$\Leftarrow$" und der bereits erwähnten Tatsache, daß jeder Punkt von $S \setminus K$ isoliert ist in S. Um zu zeigen, daß f eigentlich ist, ist nur noch die Abgeschlossenheit von f zu verifizieren:

Sei $F \subset S$ abgeschlossen.

Fall 1: $F \cap N_n' \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(F)$ abgeschlossen in A nach Definition von f.

Fall 2: $F \cap N_n' \neq \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Aus (3)"$\Rightarrow$" folgt dann: $K \cap F \neq \emptyset$. $\Rightarrow x \in f(F) \Rightarrow$ Beh..

Also ist f eine eigentliche, surjektive Abbildung von S auf A.

(4) Beh.: S ist C-eingebettet in T.

Bew. von (4): Da $S \neq \emptyset$ und σ-kompakt, also Lindelöf ist, genügt es nach [We:10.7.(2)] und [We:10.4.] folgendes zu zeigen:

Ist Z eine Nullstellenmenge von T mit $Z \cap S = \emptyset$, so werden S und Z vollständig getrennt.

Sei also $Z \in \bar{\mathfrak{Z}}(T)$ mit $Z \cap S = \emptyset$ gegeben. Da K kompakt und Z abgeschlossen ist, werden Z und K vollständig getrennt nach II.1.8.(b). Nach II.1.5.(b) gibt es dann ein $g \in C(T)$ mit $g|_K = 1$ und $g|_Z = 0$. Sei $Z_1 := \{t \in T \mid |g(t)| \geq 1/2\}$. Dann gilt: $Z_1 \in \bar{\mathfrak{Z}}(T)$,

$Z \cap Z_1 = \emptyset$ und Z_1 ist eine Umgebung von K in T. Nach (3) enthält dann Z_1 fast alle N'_n ($n \in \mathbb{N}$). Ist $\text{card}(S \setminus Z_1) < \infty$, so ist der Beweis beendet. Ist $\text{card}(S \setminus Z_1) = \infty$, so ist $S \setminus Z_1 \in \mathbb{N}(T)$ (vgl. II.2.4.(d)). Nach II.2.4.(c) gibt es dann $Z_2 \in \bar{\mathbb{Z}}(T)$ mit $Z_2 \cap Z = \emptyset$ und $(S \setminus Z_1) \subset Z_2$. $Z' := Z_1 \cup Z_2$ leistet dann das Gewünschte. Damit ist (4) gezeigt.

(5) Beh.: O.B.d.A. kann f zusätzlich minimal gewählt werden.

Bew. von (5): Nach [We: 17.5.] gibt es einen abgeschlossenen Teilraum $S' \subset S$ derart, daß $g := f|_{S'}$ eine minimale Abbildung von S' auf A ist. Dann ist S' abgeschlossen in T, und g ist eine eigentliche, surjektive Abbildung von S' auf A. Schließlich ist S' C-eingebettet in S, da S σ-kompakt, also insbes. normal ist. Also ist S' C-eingebettet in T. Das beendet den Beweis von (5).

Damit ist "(c) $\Rightarrow$ (a)" bewiesen. %

V.3.5. Frage 5. Gibt es eine ähnliche Charakterisierung der $\tau\alpha'$-Räume in der Klasse der μ-Räume (oder der parakompakten Räume)?

V.3.6. Folgerung. Sei T ein μ-Raum.

(a) Ist jeder abgeschlossene, C-eingebettete, σ-kompakte Teilraum von T hemikompakt, so ist T ein $\tau\alpha$-Raum.

(b) Ist T lokalkompakt, so ist T ein $\tau\alpha$-Raum.

Beweis: (a): Wäre T kein $\tau\alpha$-Raum, so gibt es nach V.3.4.(c) einen abgeschlossenen, C-eingebetteten Teilraum $S \subset T$ und eine eigentliche, surjektive Abbildung von S auf A. Da S σ-kompakt ist, ist S hemikompakt nach Voraussetzung. Wie man sich ohne Mühe klarmacht, ist das eigentliche Bild

eines hemikompakten Raumes hemikompakt. Also ist A hemikompakt. Da jeder Punkt von A eine abzählbare Basis seiner Umgebungen besitzt, ist $C_c(A)$ vollständig metrisierbar (siehe II.4.12., II.5.2., II.5.5., II.5.6.(a)). Also ist A insbesondre ein $\tau\alpha$-Raum. Das ist jedoch ein Widerspruch zu V.3.2.(e).

(b) folgt aus (a) und [B:Ch.I,§9.9.cor.1.] . %

V.3.7. Folgerung. Sei T μ-Raum und f: S $\longrightarrow$ T eine eigentliche, surjektive Abbildung. Dann gilt:

S $\tau\alpha$-Raum $\Leftrightarrow$ T $\tau\alpha$-Raum.

Beweis: "$\Leftarrow$" folgt aus V.1.7..

"$\Rightarrow$": Wieder nach V.1.7. ist S ein μ-Raum. Ist T kein $\tau\alpha$-Raum, so gibt es nach V.3.4. einen abgeschlossenen Teilraum T' von T sowie eine eigentliche, surjektive Abbildung g: T' $\longrightarrow$ A. Definiere $S' := f^{-1}(T')$. S' ist dann ein abgeschlossener Teilraum von S, und $h := g \circ f|_{S'}$ ist dann eine eigentliche, surjektive Abbildung von S' auf A ([B:Ch.1.§10.1.prop.3;prop.5]). Wieder nach V.3.4. folgt dann: S ist kein $\tau\alpha$-Raum, was zu zeigen war.

%

Kapitel VI

Eine Charakterisierung der Pseudovollständigkeit in Sinne von Oxtoby in der Klasse $C_s(T)$

VI.1. $\tau\pi$-Räume

VI.1.1. Definition. T heißt $\tau\pi$-Raum : $\Leftrightarrow$ Jede abzählbare Teilmenge von T ist diskret und C-eingebettet.

VI.1.2. Bemerkung. T ist $\tau\pi$-Raum $\Leftrightarrow$ Ist $A \subset T$ abzählbar unendlich, so gilt: $A \in \mathbb{N}(T)$. Das ist klar mit II.1.8.(a).

VI.1.3. Satz. Es sind äquivalent:

(a) T ist $\tau\pi$-Raum.

(b) $C_s(T)=C_b(T)$ und $C_s(T)$ ist pseudovollständig (im Sinne von Oxtoby).

(c) $C_s(T)$ ist pseudovollständig (im Sinne von Oxtoby).

Beweis:

(a)$\Rightarrow$(c): Daß $C_s(T)$ quasiregulär ist, ist klar. Sei $\mathfrak{B}$ die natürliche Basis der Topologie der punktweisen Konvergenz, also $\mathfrak{B} := \{V(f,E,\varepsilon) \mid f \in C(T),\ E \subset T \text{ endlich}, \varepsilon > 0\}$, wobei $V(f,E,\varepsilon) := \{g \in C(T) \mid |f(e)-g(e)| < \varepsilon \text{ für alle } e \in E\}$.

Insbesondre ist also $\mathfrak{B}$ eine Pseudobasis für $C_s(T)$.

Die Pseudovollständigkeit von $C_s(T)$ folgt nun aus:

(1) Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $C_s(T)$ mit $B_n \in \mathfrak{B}$ und $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

Sei also $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $B_n \in \mathfrak{B}$ und $\overline{B_{n+1}} \subset B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ habe B_n die folgende Gestalt:

$B_n = V(f_n, E_n, \varepsilon_n)$ mit $f_n \in C(T)$, $E_n \subset T$ endlich und $\varepsilon_n > 0$.

Sei $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. E ist abzählbar.

Für $t\in T$ definiert man: $p_t := R^T_{\{t\}}$ (siehe II.4.8.).

(2) Behauptung: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_e(B_n)\neq\emptyset$ für $e\in E$.

Bew. von (2): Ist $e\in E_m$, so gilt für $l\geq m$: $[f_l(e)-\varepsilon_l, f_l(e)+\varepsilon_l]\subset p_e(\overline{B_l})$. Das folgt aus der Tatsache, daß jede endliche Teilmenge von T diskret und C-eingebettet ist in T nach II.1.8.(b). Aus der Voraussetzung $\overline{B_{n+1}}\subset B_n$ für $n\in\mathbb{N}$ folgt: $([f_l(e)-\varepsilon_l, f_l(e)+\varepsilon_l])_{l\geq m}$ ist eine Folge kompakter Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Also gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_e(\overline{B_n})\neq\emptyset$. Da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_e(B_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_e(\overline{B_n})$, folgt (2). Wähle nun für $e\in E$ $r_e\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_e(B_n)$, was nach (2) möglich ist. Da $T\,\tau\pi$-Raum ist nach Voraussetzung, gibt es $g\in C(T)$ derart, daß $g(e)=r_e$ für $e\in E$.

Es gilt: $g\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Denn seien $n\in\mathbb{N}$ und $e\in E_n$ gegeben. Dann gilt: $|g(e)-f_n(e)| = |r_e-f_n(e)|<\varepsilon_n$ nach Definition von r_e. Damit ist (1) bewiesen, und die Behauptung folgt.

(c)$\Rightarrow$(b): Da aus der Pseudovollständigkeit von $C_s(T)$ die Tonneliertheit von $C_s(T)$ folgt, ergibt sich die Behauptung aus II.5.9..

(b)$\Rightarrow$(a): Sei D eine abzählbar unendliche Teilmenge von T gegeben. Nach der Bemerkung VI.1.2. und der Anmerkung in II.4.9.(d) genügt es zu zeigen: $\varepsilon(R^T_D(C(T))) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei ε die kanonische Einbettung von $C_s(D)$ in $\mathbb{R}^D=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist (siehe II.4.4.(b)).

Da nach Voraussetzung $C_b(T)=C_s(T)$ ist, ist jede kompakte Teilmenge von T endlich. Also ist jede Teilmenge von T fast abgeschlossen, und für jede Teilmenge $S\subset T$ gilt: $C_c(S)=C_s(S)$. $\Rightarrow$ R^T_D: $C_s(T)\longrightarrow C_s(D)$ ist stetig und relativ fast offen nach II.4.13.(d). Da $C_s(T)$ pseudovollständig ist

nach Voraussetzung, folgt aus I.2.11.: $R_D^T(C(T))$ ist eine vollständige Teilmenge von $C_s(D)$, denn $R_D^T(C(T))$ ist metrisierbar, besitzt also bekanntlich sogar eine metrisierbare Vervollständigung. Da $R_D^T(C(T))$ dicht ist in $C_s(D)$ nach II.4.13.(b), $\varepsilon(C(D))$ dicht ist in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ist $\varepsilon(R_D^T(C(T)))$ dicht in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Da ε ein topologischer Isomorphismus ist, ist $\varepsilon(R_D^T(C(T)))$ vollständig, also abgeschlossen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, da $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ separiert ist. Also gilt: $\varepsilon(R_D^T(C(T))) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, was wir zeigen wollten. %

VI.1.4. Bemerkung. $C_s(E_{\mathfrak{U}})$ ist ein Beispiel eines metrisierbaren Baire'schen Raumes (IV.4.11.(c)), der nicht pseudovollständig ist (VI.1.3.). Beispiele von $\tau\pi$-Räumen findet man im nächsten Abschnitt.

VI.2. P-Räume

VI.2.1. Definition. T heißt P-Raum (im Sinne von GILLMAN-JERISON) : $\Leftrightarrow$ Jede G_δ-Menge in T ist offen.

VI.2.2. Bemerkung. P-Räume werden in [GJ:Excs.4J,K,L] und in [GH] behandelt. Jeder P-Raum ist ein $\tau\pi$-Raum (VI.2.4.), aber die Umkehrung gilt nicht (VI.2.6.).

VI.2.3. Satz. Es sind äquivalent:

(a) T ist P-Raum.

(b) Jede Folge in C(T) ist gleichgradig stetig.

(c) $C_s(T)$ ist folgenvollständig.

(d) $C_s(T)$ ist lokal oder Mackey-vollständig, d.h.: Ist $\emptyset \neq B \subset C_s(T)$ abgeschlossen, absolutkonvex und beschränkt, so ist $(C(T))_B$ (siehe [H:p.207]) ein Banachraum.

Beweis: Siehe [Sch:III.5.2.] .

VI.2.4. Lemma. (vgl. [GJ:4K.2.])

Jeder P-Raum ist ein $\tau\Pi$-Raum

Beweis: Sei $D:=\{t_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche Teilmenge eines P-Raumes T. Aus dieser Voraussetzung folgt: Es gibt eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen $U_n \subset T$ mit $t_n \in U_n$ $(n\in\mathbb{N})$ derart, $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ für $n\neq m$ gilt (Induktion). Wieder wegen der Voraussetzung, daß T ein P-Raum ist, folgt sofort, daß die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalendlich ist. Die Behauptung folgt dann aus II.2.4.(b). ⅋

VI.2.5. Definition. Sei (L,τ) folgendermaßen definiert:

(a) $L:=\mathbb{R}$. $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ bezeichne die Borelschen Mengen von $\mathbb{R}$. λ sei das Lebesguemaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

(b) Für $l\in L$ definiert man:

$$\mathcal{A}(l):=\begin{cases}\{\{l\}\} & \text{, falls } l\neq 0\\ \{U \mid 0\in U,\ U\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(\mathbb{R}\setminus U)<\infty\} & \text{, falls } l=0\end{cases}$$

(c) Sei τ die eindeutig bestimmte, separierte Topologie auf L derart, daß $\mathcal{A}(l)$ für $l\in L$ eine Umgebungsbasis von l bezüglich τ ist (vgl. IV.3.2.).

VI.2.6. Eigenschaften von $L:=(L,\tau)$ und $C_s(L)$.

(a) L ist vollständig regulär nach IV.3.1..

(b) L ist kein P-Raum, denn $\{0\}$ ist zwar eine G_δ-Menge in L, aber $\{0\}$ ist keine Umgebung von 0 in L.

(c) L ist ein $\tau\Pi$-Raum.

Sei $D:=\{t_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche Teilmenge von L. Ist $0\notin D$, so ist $(\{t_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalendliche Folge paarweise disjunkter, offener Mengen ($\lambda(D)=0$).

Ist $0 \in D$, so sei o.B.d.A. $t_0 = 0$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$: $U_n := \{t_n\}$, falls $n \geq 1$; $U_0 := \mathbb{R} \setminus \{t_n \mid n \geq 1\}$. Dann ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalendliche Folge paarweise disjunkter, offener Mengen mit $t_n \in U_n$ $(n \in \mathbb{N})$. In beiden Fällen folgt wegen II.2.4.(b): $D \in \mathbb{N}(L)$.

(d) Aus (a), (b), (c), VI.1.3., VI.2.3. folgt nun: $C_s(L)$ ist ein pseudovollständiger lokalkonvexer Raum, der nicht lokal vollständig ist.

VI.2.7. Bemerkungen.

(a) Es gibt P-Räume, die nicht normal sind (vgl. [GH:7.7.(4)]). Also folgt aus der Pseudovollständigkeit von $C_c(T) = C_s(T)$ nicht notwendig, daß T normal ist.

(b) Es gibt P-Räume, die nicht reellkompakt sind. Ein Beispiel ist der in [GJ:Exc.9L.] angegebene Raum X. Da $\text{card}(X) \leq 2^{\text{card}(\mathbb{R})}$, folgt aus [CN:2.5.] und [CN:6.3.], daß X nicht einmal topologisch vollständig ist. Da X ein μ-Raum ist nach VI.2.4., ist X als Beispiel für die Aussage in II.3.18.(10) geeignet. Schließlich ist wieder $C_c(X) = C_s(X)$ pseudovollständig.

(c) Schließlich sei noch vermerkt, daß es P-Räume gibt, die nicht abzählbar parakompakt sind (Zur Definition eines abzählbar parakompakten Raumes siehe z.B. [E:5.2.] oder [AS:1.10.].). Ein Beispiel eines solchen Raumes ist der in [AS:Ex.8;pp.105-112] angegebene Raum X, der von M.E. RUDIN konstruiert wurde. X ist ein P-Raum ([AS:p.106;(m)]), der normal ([AS:pp.109-112]), aber nicht abzählbar parakompakt ist ([AS:pp.107-108]).

Literaturverzeichnis

[AK] AMEMYIA, I.; KOMURA, Y.:

Über nichtvollständige Montelräume
Math. Annalen 177 (1968), pp. 273-277

[Ar_1] ARCHANGEL'SKIĬ, A. V.:

Über eine Klasse von Räumen (russisch)
Mat. sbornik 67 (1965), pp. 55-88

[Ar_2] ARCHANGEL'SKIĬ, A. V.:

Bicompact sets and the topology of spaces
Trans. of the Moscow Math. Soc. for the
year 1965, pp. 1-62

[AS] ALÒ, R. A., SHAPIRO, H. L.:

Normal topological spaces
Cambridge Univ. Press, London 1974

[B] BOURBAKI, N.:

General topology; Part 1, Part 2
Hermann, Paris 1966

[C] COMFORT, W. W.:

On the Hewitt realcompactification of
a product space
Trans. AMS 131 (1968), pp. 107-118

[CN] COMFORT, W. W.; NEGREPONTIS, S.:

Continuous pseudometrics
Dekker, New York 1975

[DLP] van DOUWEN, E.K.; LUTZER, D.J.; PRZYMUSINSKI, T.C.:

Some extensions of the Tietze-Urysohn theorem
The American Math. Monthly 84 (1977), pp. 435-441

[E] ENGELKING, R.:

General Topology
PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977

[GH] GILLMAN, L.; HENRIKSEN, M.:

Concerning rings of continuous functions
Trans. AMS 77 (1954), pp. 340-362

[GJ] GILLMAN, L.; JERISON, M.:

Rings of continuous functions
van Nostrand Reinhold Comp., New York 1960

[H] HORVÁTH, J.:

Topological vector spaces and distributions, vol. I
Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1966

[K] KELLEY, J. L.:

General Topology
van Nostrand Reinhold Comp., New York 1970

[LMC] LUTZER, D. J.; McCOY, R. A.:

Category in function spaces, I
Preprint 1978

[M] MORITA, K.:

A survey in the theory of M-spaces
Gen. Topology and its appl. 1 (1971), pp. 49-55

[N] NACHBIN, L.:

Topological vector spaces of continuous functions
Proc. Nat. Acad. U.S.A. 40 (1954), pp. 471-474

[O] OXTOBY, J. C.:

Cartesian products of Baire spaces
Fund. Math. 49 (1961), pp. 157-166

[P] PTAK, V.:

Über vollständige topologische lineare Räume
(russisch mit englischer Zusammenfassung)
Czech. Math. Journal 3 (78), (1953), pp. 3o1-364
Ins Englische übersetzt in:
AMS Translations 110, Series 2 (1977), pp. 61-106

[R] ROELCKE, W.:

Increasing sequences of absolutely convex sets
Unveröffentlichtes Manuskript eines Vortrags,
gehalten anläßlich des Cambridge talk 1970

[Sch] SCHMETS, J.:

Espaces de fonctions continues
Lecture Notes in Math., vol. 519
Springer Verlag, Berlin 1976

[Sa_1] SAXON, S. A.:

Nuclear and product spaces, Baire-like spaces
and the strongest locally convex topology
Math. Annalen 197 (1972), pp. 87-106

[Sa_2] SAXON, S. A.:

Some normed barrelled spaces which are not Baire
Math. Annalen 209 (1974), pp. 153-160

[Sa_3] SAXON, S. A.:

Two characterizations of linear Baire spaces
Proc. AMS 45 (1974), pp. 204-208

[ST] SAXON, S. A.; TODD, A. R.:

A property of locally convex Baire spaces
Math. Annalen 206 (1973), pp. 23-34

[T_1] TODD, A. R.:

Linear Baire spaces and analogs of convex
Baire spaces
University of Florida dissertation (1972)

[T_2] TODD, A. R.:

Continuous linear images of pseude-complete linear topological spaces
Pacific Journal of Math. 63 (1976), pp. 281-292

[V] VALDIVIA, M.:

Absolutely convex sets in barrelled spaces
Ann. Inst. Fourier Grenoble 21 (1971), pp. 3-13

[Wa] WARNER, S.:

The topology of compact convergence on continuous function spaces
Duke Math. Journal 25 (1958), pp. 265-282

[We] WEIR, M. D.:

Hewitt Nachbin spaces
North Holland Publ. Comp., Amsterdam 1975

[Wi] WILANSKY, A.:

Topology for Analysis
Ginn & Comp., Waltham, Mass. 1970

[Wk] WICKE, H. H.:

On the Hausdorff open continuous images of Hausdorff paracompact p-spaces
Proc. AMS 22 (1969), pp. 136-140

Verzeichnis der offenen Fragen

Die Nummern in der rechten Spalte verweisen auf die entsprechende Stelle im Text.

Frage 1:	Seite 45	III.3.3.
Frage 2:	Seite 52	IV.2.4.
Frage 3:	Seite 58	IV.3.10.
Frage 4:	Seite 63	IV.4.12.
Frage 5:	Seite 73	V.3.5.

Symbole

A	68	$\mathcal{F}$	59
a_r	26	γT	21
$\alpha\mathbb{R}$	22	$K_1(T)$	47
$B(T)$	18	μT	22
βT	21	$N(T)$	18
$Coz(R)$	16	$\|\varphi\|$	33
$C(T), C^b(T)$	15	$P_B(f)$	24
$C_i(T), i\in\{b,c,s\}$	25	R_S^T	26
$C_i^b(T), i\in\{u,b,c,s\}$	25	S	64
d	34	T	17
$\mathfrak{D}$	59	$trg(\varphi)$	33
E	20	$trg(B)$	34
$\overline{E}$	20	$trg(f)$	34
$E_{\mathfrak{D}}$	59	$\mathfrak{U}$	62
$E_{\mathcal{F}}$	59	νT	21
$E_{\mathfrak{U}}$	62	$\nu_f T$	22
ε	25	$\overline{Z}(R)$	16
f^{β}	22,66	$Z(f)$	15

$\mathbb{N} := \{0,1,2,\ldots\}$.

$[a;b] := \{r\in\mathbb{R} \mid a\leq r\leq b\}$.

Bezeichnungen

α-Raum	8	Čech-vollständig	48
α'-Raum	8	$C^{(*)}$-eingebettet	15
α'_b-Raum	8	eigentliche Abb.	65
α'_l-Raum	8	fast abgeschlossen	27
Abschneidefunktion	26	fast σ-kompakt	30
Baire'sche Kategorie	6	hemikompakt	29
Baire'scher Raum	6	hyperreelle Abb.	66
Baire-like space	8	Konullstellenmenge	15
β-Raum	60	k-Raum	27

k_R-Raum 30
(KT)-Eigenschaft 60

lokal vollständig 77

Mackey-vollständig 77
mager 6
M-Raum 49
minimale Abb. 69
μ-Raum 22

nirgends dicht 6
Nullstellenmenge 15

P-Raum 77
p-Raum 49
perfekte Abb. 65,66
perfekt normal 68
Pseudobasis 7
pseudokompakt 18
pseudovollständig 7
punktweise abzählbarem Typ (Raum von) 47

quasiregulär 7

reellkompakt 20
Reflexion ($\mathbb{E}$-) 20
relativ fast offene Abb. 7

S 64
stetige Metrik 14
Stone-Čech-Kompaktifizierung 21
submetrisierbar 14

T 17
$\tau\alpha$-Raum 38
$\tau\alpha'$-Raum 39
topologisch beschränkt 17
topologisch vollständig 20
$\tau\pi$-Raum 75
Träger 33,34

unordered Baire-like space 8

vollständig getrennt 16
vollständig regulär 16

Lebenslauf

Wolfgang Lehner,
geboren am 14. März 1950
in Peißenberg, Bayern.

Schulbildung:

1956-1960	Volksschule in München
1960-1969	Gymnasium in München
28. 6. 1969	neuspr. Abitur in München

Studium:

1969-1975	Studium der Mathematik an der Universität München
1975-1978	Promotionsstudium der Mathematik an der Universität München

Abschlußprüfung:

15. 10. 1975	Diplom-Hauptprüfung in Mathematik an der Universität München

München, den 15. Nov. 1978